9 Théorème de Steinhauß

Leçons 207, 241(, 230, 262)

Ref : [Zuily-Queffélec] Chap XIII Th III.1

On sait qu'une série entière admet au moins un point singulier sur le bord de son disque de convergence. Sinon, tous les points seraient réguliers, et on pourrait alors, par compacité du cercle unité (on se ramène au cas d'une série dont le rayon de convergence est 1), prolonger la fonction en une fonction holomorphe sur le disque ouvert de rayon $1+\varepsilon$. Mais alors, la nouvelle fonction est analytique, et donc holomorphe sur le grand disque, et les deux développements en série entière coïncident, donc les deux séries sont les mêmes (principe des zéros isolés). Donc le rayon de la série entière est d'au moins $1+\varepsilon$, ce qui est absurde.

On voudrait maintenant savoir s'il est possible d'avoir "beaucoup" de points singuliers. On dit que le cercle $\mathbb{S}^1$ est une *coupure* pour la série entière si tous ses points sont singuliers. La série $\sum_{n\geq 0} z^{2^n}$ par exemple admet toutes les racines 2^k-ièmes de l'unité comme points singuliers, et donc par densité, le cercle en est une coupure. Le théorème suivant montre que ce cas est tout sauf un cas isolé.

Théorème 1 (Steinhauß) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, et $W=(W_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires complexes indépendantes indentiquement réparties selon la loi uniforme sur le cercle $\mathbb{S}^1$. Alors, presque sûrement, le cercle est une coupure pour la série $\sum_{n\geq 0} a_n W_n z^n$.

Démonstration. On note $A=\left\{\mathbb{S}^1 \text{ est une coupure pour } \sum_{n\geq 0} a_n W_n z^n\right\}$. Le but est de montrer que A est un événement de probabilité 1. On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert, et

$$\mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}} := \left\{e^{2i\pi\theta},\ \theta\in\mathbb{Q}\right\},$$

qui est dénombrable et dense dans $\mathbb{S}^1$.

Étape 1. Exhibition d'un recouvrement dénombrable de $\overline{A}$.

On se donne une réalisation $w=(w_n)_{n\geq 0}$ de la suite W. On suppose que $z_0\in\mathbb{S}^1$ est un point régulier de la série $f_w := \sum_{n\geq 0} a_n w_n z^n$. Il existe donc un voisinage ouvert de z_0 dans $\mathbb{C}$ qui ne contient que des points réguliers pour f_w ; quitte à le réduire on peut supposer que son intersection avec $\mathbb{S}^1$ est de la forme

$$I := \left\{e^{2i\pi\theta},\ \theta\in(a,b)\right\},$$

avec $a<b$ rationnels. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des arcs de cercles ouverts de $\mathbb{S}^1$ à extrémités dans $\mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}}$, et on définit

$$A_I := \{\text{Tous les points de } I \text{ sont réguliers pour } f_w\}.$$

Alors, d'après ce qui précède, $\overline{A}$ est l'ensemble des réalisations w de W telles qu'il existe un arc $I\in\mathcal{C}$, tel que A_I est vrai. Ainsi, on doit montrer que $\bigcup_{I\in\mathcal{C}} A_I$ est un événement de probabilité nulle, et donc, comme $\mathcal{C}$ est dénombrable, il suffit de montrer que les A_I sont des événements de probabilité nulle.

Étape 2. Les A_I sont des événements.

On se donne $I\in\mathcal{C}$, $z_0\in I$, et une réalisation w de W qui est dans A_I. Par définition de I, z_0 est régulier pour f_w et il existe donc $\varepsilon>0$ tel que f_w se prolonge de manière holomorphe à $\mathbb{D}\cup B(z_0,\varepsilon)$. Ainsi, il existe un réel $\eta>\frac{1}{2}$ tel que f_w se prolonge de manière holomorphe à $B\left(\frac{z_0}{2},\eta\right)$ (voir figure 9.1), et réciproquement. Ainsi, on a pour tout $z\in B\left(\frac{z_0}{2},\eta\right)$

$$f_w(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{f_w^{(n)}\left(\frac{z_0}{2}\right)}{n!}\left(z-\frac{z_0}{2}\right)^n.$$

Donc z_0 est régulier si et seulement si le rayon de convergence de cette série est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, d'après le théorème de Cauchy-Hadamard, si et seulement si

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{f_w^{(n)}\left(\frac{z_0}{2}\right)}{n!}\right|^{\frac{1}{n}}<2.$$

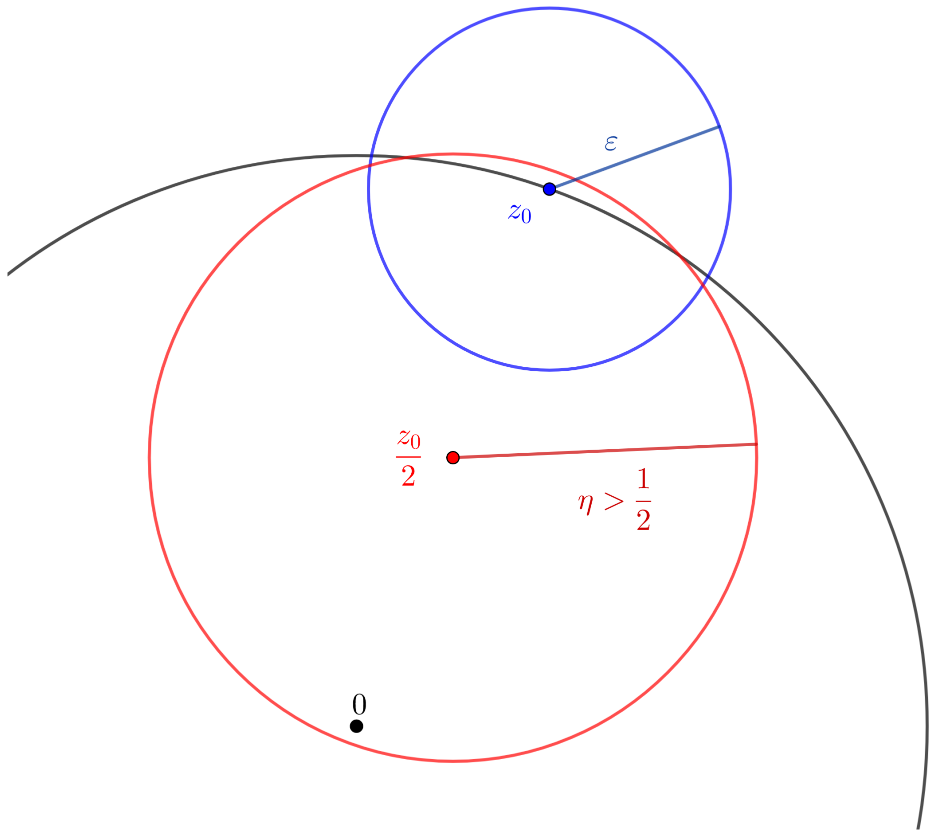

FIGURE 9.1 – Prolongement de f_w à un disque sortant de $\mathbb{D}$.

On a donc

$$\begin{aligned}
A_I &= \left\{ w \in (\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}},\ \forall z_0 \in I \ \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| \frac{f_w^{(n)}\left(\frac{z_0}{2}\right)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} < 2 \right\} \\
&= \left\{ w \in (\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}},\ \forall z_0 \in I \cap \mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}} \ \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| \frac{f_w^{(n)}\left(\frac{z_0}{2}\right)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} < 2 \right\} \quad \text{par densité de } \mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}} \\
A_I &= \bigcap_{z_0 \in I \cap \mathbb{S}^1_{\mathbb{Q}}} \underbrace{\left\{ w \in (\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}},\ \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| \frac{f_w^{(n)}\left(\frac{z_0}{2}\right)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} < 2 \right\}}_{\substack{\text{événement comme image réciproque} \\ \text{d'une limite supérieure de v.a.}}}
\end{aligned}$$

Donc A_I est un événement comme intersection dénombrable d'événements.

Étape 3. Application de la loi de Kolmogorov.

Puisque l'expression $f_W^{(n)}\left(\frac{z_0}{2}\right)$ ne dépend pas des variables $W_0, .., W_{n-1}$, l'événement A_I, tel qu'il est décomposé à l'étape précédente, appartient à la tribu asymptotique associée aux $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or ces variables aléatoires sont indépendantes, donc d'après la loi du 0-1 de Kolmogorov, A_I est de probabilité 0 ou 1. Il suffit donc d'exclure le cas $\mathbb{P}(A_I) = 1$.

On se donne J un second arc de même longueur que I : il existe alors un réel θ tel que

$$J = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} I.$$

On pose alors pour $n \in \mathbb{N}$

$$W_n^\theta := W_n \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

Puisque le cercle est invariant par rotation et que les W_n suivent une loi uniforme, W_n et W_n^θ sont de même loi. De plus, par construction, I est régulier pour f_w si et seulement si J l'est pour f_{w^θ}. On en déduit que $\mathbb{P}(A_J) = \mathbb{P}(A_I)$. Supposons par l'absurde qu'un intervalle I soit tel que A_I est de probabilité

1. Alors il existe un recouvrement de $\mathbb{S}^1$ par des intervalles $I_1, .., I_N$ de même longueur que I. Mais alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{N} A_{I_j}\right) = 1,$$

et cette intersection est en fait l'événement $\{\text{Tous les points du cercle sont réguliers}\}$. C'est absurde, puisque l'on sait que cet événement est vide d'après la remarque préliminaire. Donc $\mathbb{P}(A_I) = 0$. $\square$