8 Méthode des caractéristiques

Leçons 220, 221, 222(, 215)

Ref :

Pour ce développement, je me suis inspiré d'un cours de Master 1, et je n'ai pas trouvé de référence qui me plaise vraiment. La méthode des caractéristiques est bien sûr présentée dans les livres classiques sur les EDPs (voir [Evans] par exemple) mais toujours avec un formalisme beaucoup plus lourd que nécessaire au niveau de l'Agrégation.

On applique donc la **méthode des caractéristiques** à la résolution des équations hyperboliques linéaires, de la forme suivante

$$\begin{cases} \partial_t u + \langle a, \nabla_x u \rangle + a_0 u = f \quad \text{sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d & (1a) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d & (1b) \end{cases}$$

Les hypothèses sont les suivantes :

- t est une variable de temps de dimension 1,
- x est une variable d'espace de dimension d,
- $f : \mathbb{R}^d\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a_0 : \mathbb{R}^d\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des données, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$,
- $a : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ (x,t) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_1(x,t) \\ \vdots \\ a_d(x,t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$ est une autre donnée, de classe C^1 et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'espace,
- $u_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est la donnée initiale, de classe C^1.

Théorème 1 Le problème (1) admet une unique solution u de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d\times[0,T]$ [1], pour tout $T > 0$, et on en connaît l'expression.

Démonstration. On raisonne par analyse-synthèse. On suppose qu'il existe une solution u au problème, et on étudie celle-ci le long de courbes paramétrées par la variable temporelle.

Étape 1. Choix des courbes caractéristiques.

On se donne donc $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ la paramétrisation d'une de ces courbes. On pose alors pour $s \in [0,T]$

$$v(s) = u(X(s), s).$$

On utilise la règle de dérivation en chaîne [2] pour dériver v :

$$v'(s) = \langle \nabla_x u(X(s), s), X'(s) \rangle + \partial_t u(X(s), s). \tag{2}$$

Le principe est maintenant de choisir la courbe X de manière à simplifier cette équation. Au vu de (1a), on souhaiterait que $X'(s)$ soit égal à $a(X(s), s)$. On considère donc le problème de Cauchy suivant, associé aux données $(x,t) \in \mathbb{R}^d\times[0,T]$:

$$\begin{cases} X'(s) = a(X(s), s) & (3a) \\ X(t) = x & (3b) \end{cases}$$

Comme a est lipschitzienne, celui-ci admet, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, une unique solution définie sur $[0,T]$, que l'on note $X(\cdot\,; x, t)$. Si l'on choisit ces courbes [3], on remarque (2) devient l'EDO suivante

$$v'(s) = -a_0(X(s), s)v(s) + f(X(s), s). \tag{4}$$

1. On n'est pas obligé d'en parler, cette condition est juste là pour pouvoir intégrer sans se poser de questions.
2. Il faut bien comprendre tous les objets présents : la dérivée de u en x est son vecteur gradient (spatial), à d composantes, la dérivée X' de X est simplement un vecteur composé des dérivées de chaques composantes de X.
3. Pour l'instant, la valeur de x et t n'importe pas.

Étape 2. Expression de v.

On intègre alors cette équation : l'équation homogène a pour solution

$$v_h(s) = \lambda \exp\left(-\int_0^s a_0(X(\sigma),\sigma)d\sigma\right).$$

On applique alors la méthode de variation de la constante. On se donne une fonction $\lambda : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$v(s) = \lambda(s) \exp\left(-\int_0^s a_0(X(\sigma),\sigma)d\sigma\right).$$

Alors on a

$$\lambda'(s) = f(X(s),s) \exp\left(\int_0^s a_0(X(\sigma),\sigma)d\sigma\right),$$

donc en intégrant, avec la condition $\lambda(0) = v(0)$, on obtient

$$\lambda(s) = v(0) + \int_0^s f(\sigma) \exp\left(\int_0^\sigma a_0(X(\tau),\tau)d\tau\right) d\sigma.$$

Finalement, on a

$$v(s) = v(0) \exp\left(-\int_0^s a_0(X(\sigma),\sigma)d\sigma\right) + \int_0^s f(X(\sigma),\sigma) \exp\left(-\int_\sigma^s a_0(X(\tau),\tau)d\tau\right) ds.$$

Étape 3. Détermination de la solution.

La condition initiale est donnée par

$$v(0) = u(X(0;x,t),0) = u_0(X(0;x,t)).$$

On remarque également que, comme $X(t;x,t) = x$, on a

$$v(t) = u(X(t;x,t),t) = u(x,t).$$

Finalement, on a donc

$$u(x,t) = u_0\left(X(0;x,t)\right) \exp\left(-\int_0^t a_0\left(X(\sigma;x,t),\sigma\right)d\sigma\right) + \int_0^t f\left(X(\sigma;x,t),\sigma\right) \exp\left(-\int_\sigma^t a_0\left(X(\tau;x,t),\tau\right)d\tau\right) d\sigma.$$

On fait maintenant la synthèse. L'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz montre qu'il y a une loi de groupe sur les caractéristiques : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $s,\sigma,t \in [0,T]$, on a

$$X(\sigma; X(s;x,t),s) = X(\sigma;x,t).$$

Cette relation, permet d'obtenir, à partir de l'expression de u, que v vérifie l'équation (2), et donc que u vérifie l'équation (1a) sur tous les points de la forme $(X(s;x,t),s)$ de $\mathbb{R}^d\times[0,T]$. Or, toujours grâce à loi de groupe, à s et t fixés, $x \longmapsto X(s;x,t)$ induit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R}^d$. Donc en fait u vérifie l'équation sur tout $\mathbb{R}^d\times[0,T]$. Elle vérifie aussi les conditions initiales, et elle est de classe C^1. On a donc exhibé l'unique solution de (1). □

Exemple. On étudie une équation en dimension 1 :

$$\begin{cases} \partial_t u + \alpha x \partial_x u + \beta u = 0 \\ u(x,t) = u_0(x) \end{cases}$$

Alors on pose $v(s) = u(X(s),s)$. On a donc, en dérivant s

$$v'(s) = \partial_x u(X(s),s)X'(s) + \partial_t u(X(s),s).$$

On résout donc l'équation ordinaire

$$X'(s) = \alpha X(s).$$

La solution de cette équation, avec condition initiale $X(t;x,t) = 0$, est

$$X(s;x,t) = x\,\mathrm{e}^{\alpha(s-t)}.$$

On peut tracer les courbes pour voir ce qui se passe. On trace s en fonction de $X(s;x,t)$. On a $s = \ln\left(\frac{y}{x}\right) + t$. On a alors

$$v'(s) = -\beta v(s).$$

Ainsi, $v(s) = v(0)\,\mathrm{e}^{-\beta s} = u_0(x\,\mathrm{e}^{-\alpha t})\,\mathrm{e}^{-\beta s}$. Finalement,

$$u(x,t) = u_0(x\,\mathrm{e}^{-\alpha t})\,\mathrm{e}^{-\beta t}.$$

Par exemple, si α et β sont positifs, on observe que la courbe s'applatit et s'affaisse.

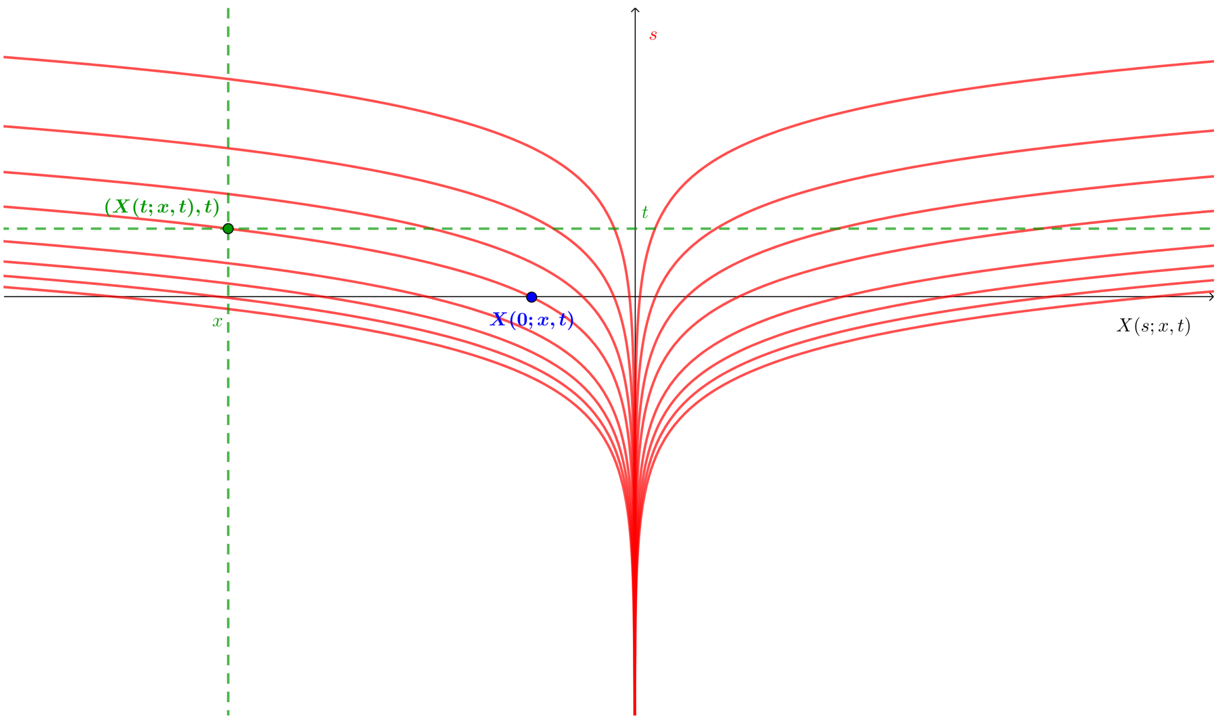

FIGURE 8.1 – Tracé des caractéristique du problème hyperbolique pour $a(x,t) = x$

On peut choisir son équation de transport préférée à la place de celle-là. On peut essayer de passer en dimension 2 aussi, avec des exemples simples c'est pas trop compliqué. En revanche, la dimension 1 est facile à tracer, contrairement à la dimension 2. On n'a pas forcément le temps de tout faire. Il faut passer vite sur les arguments EDO dans la leçon 222, c'est mieux de faire l'exemple. Pour les 220 et 221, mieux vaut privilégier les arguments EDO et ne pas faire l'exemple.