7 Lax-Milgram et problème aux limites de Neumann

Leçons 205, 213, 222(, 201, 208)

Ref : [Brézis] V.3 & VIII.4 [1]

La première étape de la démonstration du théorème de Lax-Milgram est très simple. On peut la faire si le reste ne prend pas assez de temps, si on veut accentuer le côté "complétude" du développement, mais il ne faut pas non plus y passer 5 minutes. Si au contraire on veut insister sur d'autres points, on peut même l'admettre ou le démontrer en une phrase à l'oral. De plus, il faut savoir (et éventuellement savoir pourquoi [2] aussi) que l'hypothèse de symétrie n'est pas nécessaire et simplifie juste la preuve du théorème, ce qui permet (en temps limité) de montrer l'application au problème aux limites.

Théorème 1 (Lax-Milgram) Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert réel, et a une forme bilinéaire symétrique continue coercive sur $\mathcal{H}$, et f une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$. Alors il existe un unique $u \in \mathcal{H}$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{H} \quad a(u,v) = f(v).$$

Démonstration.

Étape 1. Normes équivalentes et complétude.

On commence par démontrer un lemme faisant le lien entre deux structures de Banach sur un même espace.

Lemme 2 Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach, et $\|\cdot\|$ une autre norme sur E, équivalente à $\|\cdot\|_E$, alors $(E, \|\cdot\|)$ est un Banach.

Comme les normes sont équivalentes, on se donne α et β deux réels positifs tels que pour tout $x \in E$, on a

$$\alpha \|x\| \leq \|x\|_E \leq \beta \|x\| .$$

On se donne maintenant une suite de Cauchy $(x_n)_n$ dans $(E, \|\cdot\|)$. Il existe donc pour tout $\varepsilon > 0$ un entier $n(\varepsilon)$ tel que

$$\forall\ p,q > n(\varepsilon) \quad \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\forall\ p,q > n(\varepsilon/\beta) \quad \|x_p - x_q\|_E \leq \beta \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

Donc la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$. Comme E est de Banach, elle converge donc vers un certain $x \in E$. Il existe donc un entier $N(\varepsilon)$ tel que

$$\forall p > N(\varepsilon) \quad \|x_p - x\|_E \leq \varepsilon.$$

Ainsi, en prenant $N'(\varepsilon) = N(\alpha\varepsilon)$, on a

$$\forall p > N'(\varepsilon)\ \|x_p - x\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x_p - x\|_E \leq \varepsilon.$$

Donc $(x_n)_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$, qui est donc de Banach.

Étape 2. Structure de Hilbert sur $(\mathcal{H}, a)$.

On montre maintenant que a définit une nouvelle structure d'espace de Hilbert sur $\mathcal{H}$. Comme a est une forme bilinéaire symétrique, il suffit de montrer qu'elle est définie positive pour montrer que c'est un produit scalaire. Soit $u \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$. On a

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 > 0,$$

par hypothèse de coercivité. Donc a munit $\mathcal{H}$ d'une structure d'espace préhilbertien. De plus, on a, par coercivité (à gauche) et continuité (à droite) de a, pour $u \in \mathcal{H}$:

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u,u) \leq |||a|||\, \|u\|^2 ,$$

où $|||a|||$ désigne la norme de a en tant qu'application bilinéaire continue. On en déduit que la norme sur $\mathcal{H}$ induite par a est équivalente à celle induite par le produit scalaire. Donc, comme $\mathcal{H}$ est un Hilbert pour le produit scalaire, c'est aussi un Hilbert pour a.

1. La dernière partie s'inspire de ce qui est fait dans [Brézis] mais ce n'est pas une copie conforme.
2. On le démontre généralement à l'aide du théorème de point fixe de Banach-Picard, voir [Brézis].

Étape 3. Théorème de Riesz sous un nouvel angle.

Le théorème de Lax-Milgram se déduit alors du théorème de Riesz. En effet, puisque f est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$, elle est aussi continue (par équivalence des deux normes) sur $(\mathcal{H}, a)$. On en déduit qu'il existe un unique vecteur $u \in \mathcal{H}$ vérifiant pour tout $v \in \mathcal{H}$ la relation

$$a(u, v) = f(v).$$

□

Dans la suite, on note $\mathcal{H} = \mathcal{H}^1(0,1)$, qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u'(t)v'(t) + u(t)v(t)\ dt.$$

Application 3 Le problème aux limites associé à des conditions au bord de Neumann (E) suivant, consistant à trouver u de classe C^2 sur $[0,1]$ telle que

$$\begin{cases} -u'' = f \quad \text{sur } (0,1) \\ u'(0) = \alpha,\ u'(1) = \beta \end{cases}$$

α et β étant deux réels donnés et f une fonction continue sur $[0,1]$, admet une unique solution.

Démonstration.

Étape 1. Formulation variationnelle du problème.

On suppose disposer d'une solution u au problème (E). On se donne alors $v \in C^1(0,1)$. Comme u est aussi dans $\mathcal{H}$, en multipliant l'équation de u par v et en intégrant par parties sur $[0,1]$, on a alors

$$\int_0^1 u'(t)v'(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)\ dt + \beta v(1) - \alpha v(0).$$

On pose alors $L : \left| \begin{array}{ccl} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \langle f, v\rangle_{L^2} + \beta v(1) - \alpha v(0) \end{array} \right.$ et $a : \left| \begin{array}{ccl} \mathcal{H}\times\mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \langle u', v'\rangle_{L^2} \end{array} \right.$, de sorte que u vérifie le problème variationnel (EV)

$$a(u, v) = L(v).$$

Étape 2. Résolution faible par Lax-Milgram.

Tout d'abord, L est une forme linéaire sur $\mathcal{H}$. De plus, on a

$$|L(v)| \leq |\langle f, v\rangle_{L^2}| + (|\alpha| + |\beta|)\, \|v\|_\infty .$$

On applique Cauchy-Schwarz dans L^2, on en déduit $|\langle f, v\rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|$. De plus, la théorie des Sobolev montre que la norme infinie est moins fine que la norme sur $\mathcal{H}$. Donc $\|v\|_\infty \leq C\,\|v\|$, et finalement L est continue.

De même, a est une forme bilinéaire, et comme la norme L^2 est inférieure à la norme de $\mathcal{H}$, en appliquant Cauchy-Schwarz, on obtient que a est continue. De plus, on a, en notant C la constante donnée par l'inégalité de Poincaré sur $(0,1)$,

$$(1 + C)a(v, v) = \|v'\|_{L^2}^2 + C\,\|v'\|_{L^2}^2 \geq \|v\|^2 .$$

Donc a est coercive. Finalement, comme $\mathcal{H}$ est un Hilbert, on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram à L et a sur $\mathcal{H}$: il existe une unique $u \in \mathcal{H}$ solution de (EV).

Étape 3. Résolution du problème initial.

On voudrait maintenant remonter au problème initial. Comme u vérifie (EV), en prenant $v \in \mathcal{D}(0,1) \subset \mathcal{H}$, on en déduit que l'on a $-\langle u'', v\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle u', v'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle f, v\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$, et donc $-u'' = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$. Comme $\mathcal{D}'$ est dense dans L^2, cette égalité se fait aussi dans L^2. Mais comme f est continue, on en déduit que u'' l'est aussi, et donc l'égalité est en fait une égalité de fonctions continues. Donc u est de classe C^2. En prenant alternativement $v \in C^\infty(0,1)$ vérifiant $v(0) = 1, v(1) = 0$ et $v(0) = 0, v(1) = 1$, on déduit en intégrant par parties que u vérifie aussi $u'(0) = \alpha$ et $u'(1) = \beta$. On a donc bien résolu le problème de Laplace avec conditions de Neumann. □