6 Intégrale de Fresnel

Leçons 235, 236, 239

Ref : [Gourdon Analyse] Rem 3.3.6 & Exo 5.4.4

Proposition 1 L'intégrale de Fresnel est finie et vaut

$$\varphi = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\ .$$

Démonstration.

Étape 1. Convergence de Cesàro.

On commence par démontrer le lemme suivant [1], analogue à la convergence au sens de Cesàro des suites numériques.

Lemme 2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, qui admet une limite finie l en $+\infty$. Alors les intégrales $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\ dt$ convergent également, pour T tendant vers $+\infty$, vers l.

Par définition de la convergence de f, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un réel $M(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $t > M(\varepsilon)$, $|f(t) - l| < \varepsilon$. On se donne alors un réel $\varepsilon > 0$. Ainsi, on a pour $T > M(\varepsilon/2)$

$$\left|\int_0^T f(t)\,dt - Tl\right| \leq \underbrace{\left|\int_0^{M(\varepsilon/2)} f(t) - l\,dt\right|}_{:=K(\varepsilon)} + (T - M(\varepsilon))\int_{M(\varepsilon/2)}^T |f(t) - l|\,dt \leq K(\varepsilon) + T\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi,

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt - l\right| \leq \frac{K(\varepsilon)}{T} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, pour $T > M'(\varepsilon) = \max\left(M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \frac{2K(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$, on a

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt - l\right| \leq \varepsilon.$$

Étape 2. Convergence de l'intégrale impropre.

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{ix^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Seule la question de l'intégrabilité en $+\infty$ se pose. On fixe $T > 1$. On a

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_1^T \mathrm{e}^{ix^2}\,dx & = & \displaystyle\int_1^{T^2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{2\sqrt{u}}\,du & \text{par changement de variable } u = x^2 \\ \displaystyle\int_1^T \mathrm{e}^{ix^2}\,dx & = & \displaystyle\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{2\mathrm{i}\sqrt{u}}\right]_1^{T^2} + \int_1^{T^2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{4\mathrm{i}u^{\frac{3}{2}}}\,du & \text{par intégration par parties} \end{array}$$

Le membre de gauche converge puisque $\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}$ est borné, et $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ tend vers 0 en l'infini, et l'intégrale de droite converge absolument, donc converge. Finalement, l'intégrale de Fresnel est convergente, et vaut

$$\varphi = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,dx.$$

1. Je n'ai pas de référence exacte pour cette preuve, mais elle n'est pas très compliquée, et si on a vraiment besoin d'une bouée de secours, le raisonnement est adapté de l'exo 4.1.2 de [Gourdon Analyse].

Étape 3. Une intégrale convergente.

On pose pour $t \geq 0$

$$\begin{cases} F(t) = \displaystyle\int_{[0,t]^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x^2+y^2)}\, dxdy \\ f(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\, dx \end{cases}$$

et aussi $g(x,y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x^2+y^2)}$. On observe que g est symétrique, de même que le domaine $[0,t]^2$ sur lequel on l'intègre, ce qui permet d'affirmer que l'on a

$$F(t) = 2\int_{\Delta_t} g(t)\ dt,$$

avec $\Delta_t := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq y \leq x \leq t\right\}$. De plus, la forme de g nous incite à passer en coordonnées polaires. Le compact Δ_t est représenté par le compact

$$K_t = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ 0 \leq r\cos(t) \leq t\right\}.$$

On a ainsi

$$\begin{array}{rcll} F(t) & = & 2\displaystyle\int_{K_t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r^2}\, r\ drd\theta & \text{par changement de variable} \\ & = & 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{t}{\cos(\theta)}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r^2}\, r\ dr\right) d\theta & \text{par théorème de Fubini} \\ & = & 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r^2}\right]_0^{\frac{t}{\cos(\theta)}} d\theta & \\ F(t) & = & \dfrac{\mathrm{i}\pi}{4} - \mathrm{i}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t^2}{\cos(\theta)^2}}\, d\theta & \end{array}$$

On pose alors

$$I(T) := \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\ dt.$$

On a alors

$$I(T) = \frac{\mathrm{i}\pi}{4} - \frac{\mathrm{i}}{T}\int_0^T \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t^2}{(\cos(\theta))^2}}\, d\theta\right) dt.$$

On applique alors le théorème de Fubini, la fonction $(t,\theta) \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t^2}{(\cos(\theta))^2}}$, étant continue sur le compact $[0,T] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$:

$$\begin{array}{rcll} I(T) & = & \dfrac{\mathrm{i}\pi}{4} - \dfrac{\mathrm{i}}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t^2}{(\cos(\theta))^2}}\, dt\right) d\theta & \\ & = & \dfrac{\mathrm{i}\pi}{4} - \dfrac{\mathrm{i}}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{T}{\cos(\theta)}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2} \cos(\theta)\ du & \text{par changement de variable} \\ I(T) & = & \dfrac{\mathrm{i}\pi}{4} - \dfrac{\mathrm{i}}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\theta) f\left(\frac{T}{\cos(\theta)}\right) d\theta & \end{array}$$

Or d'après la première étape, f est bornée puisque l'intégrale de Fresnel est semi-convergente. On en déduit que $I(T)$ converge vers $\dfrac{\mathrm{i}\pi}{4}$ quand T tend vers l'infini.

Étape 4. Lien entre f et F et conclusion.

On fait finalement le lien entre les fonctions f et F, à l'aide du théorème de Fubini : on a

$$F(t) = \left(\int_{[0,t]} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\, dx\right)\left(\int_{[0,t]} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y^2}\, dy\right) = f(t)^2.$$

On en déduit une autre formule pour l'intégrale I calculée à l'étape précédente :

$$I(T) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt.$$

Ainsi, comme f tend vers φ, f^2 tend vers φ^2 et donc sa moyenne de Cesàro aussi (d'après le lemme). Finalement, on obtient donc que $\varphi^2 = \dfrac{\mathrm{i}\pi}{4}$, et en passant à la racine carrée

$$\varphi = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,.$$

Reste donc à déterminer le signe. Par exemple, la partie imaginaire de φ vaut

$$\int_0^{+\infty} \sin(u^2)\ du = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\ du = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

avec

$$u_n = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\ du = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right) du \geq 0.$$

On peut donc conclure :

$$\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,.$$

$\square$