4 Formule des compléments

Leçons 236, 245(, 235, 239)

Ref : [Bernis & Bernis] ou [Amar-Matheron] Sec. 8.4.4

Ce développement consiste à démontrer la formule relative à la fonction spéciale Γ d'Euler, définie sur $U := \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ par

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

On utilisera la branche coprincipale du logarithme, définie sur l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ par

$$\mathrm{Log}(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) := \ln(r) + \mathrm{i}\theta \qquad \forall r \in \mathbb{R}_+^*, \forall\theta \in (0, 2\pi),$$

qui est bien sûr holomorphe. De même, la puissance d'un nombre complexe est classiquement définie par

$$z^x := \exp(x\,\mathrm{Log}(z)) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{C}.$$

Théorème 1 (Euler, Formule des compléments) On note $\Omega := \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) \in (0,1)\}$. On a alors pour tout z dans Ω

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Démonstration. On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 2 Pour tout réel x dans $(0,1)$, on a

$$I(x) := \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Étape 1. Application du théorème des résidus.

On remarque tout d'abord que, d'après le critère de Riemann, la quantité $I(x)$ est bien définie pour $x \in (0,1)$. On définit la fonction

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash(\mathbb{R}_+ \cup \{-1\}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{z^x(1+z)} \end{array}\right.$$

Comme Log est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ et exp sur $\mathbb{C}$, et comme le dénominateur ne s'annule pas, f est holomorphe. Ainsi, on va pouvoir appliquer la formule de résidus : f admet -1 comme unique pôle sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$. On définit alors pour $\varepsilon \in (0,1)$ et $R \in (1, +\infty)$ le contour fermé de classe C^1 par morceaux $\Gamma_{\varepsilon,R}$ comme la concaténation des chemins c_ε, $I^+_{\varepsilon,R}$, et $C_{\varepsilon,R}$ et $I^-_{\varepsilon,R}$ dessinés sur la figure 4.1. On notera également $\theta_{\varepsilon,R}$ l'angle qui paramètre l'arc de cercle $C_{\varepsilon,R}$, et on a d'après le théorème de Pythagore

$$\theta_{\varepsilon,R} = \arctan\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}\right).$$

Comme -1 est pôle d'ordre 1 de f, on a

$$\mathrm{Res}_{-1}(f) = \lim_{z\to-1}(z+1)f(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x}.$$

Le théorème des résidus permet donc d'affirmer que

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\ dz = 2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x}. \tag{1}$$

Étape 2. Calcul des différentes contributions.

On calcule maintenant les contributions asymptotiques des quatre chemins sur lesquels on intègre f, en faisant tendre ε vers 0 et R vers l'infini.

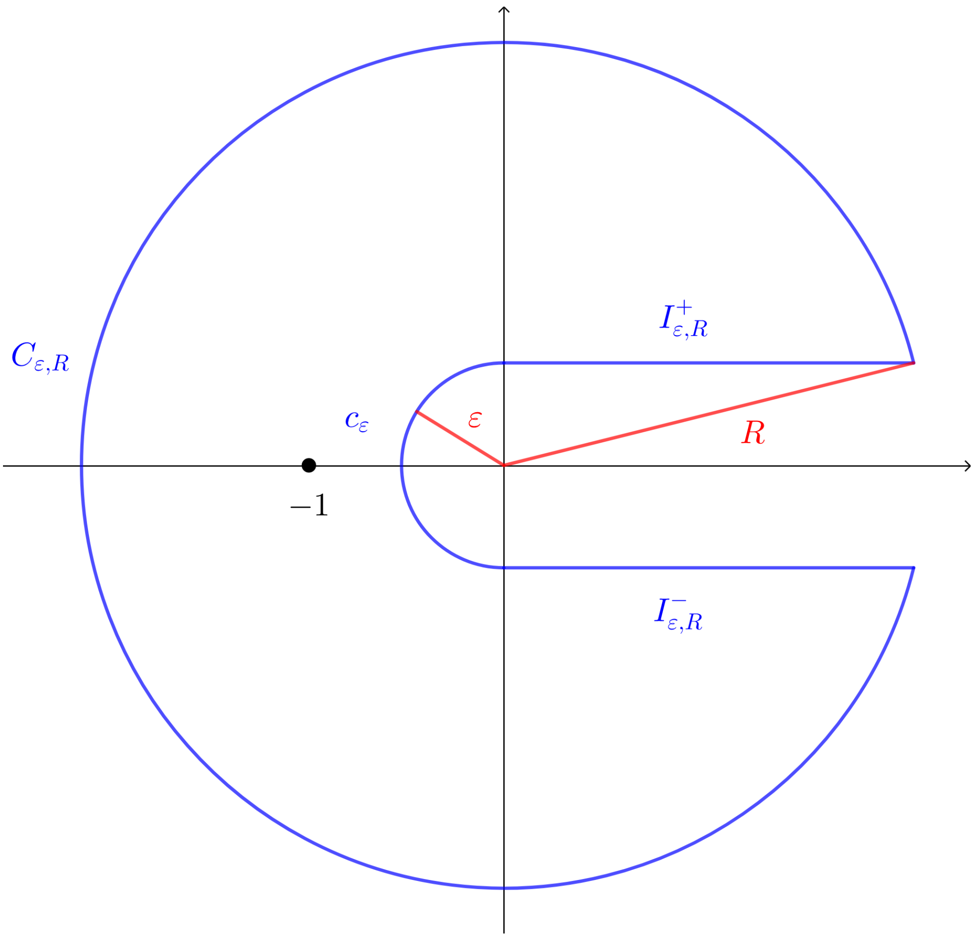

FIGURE 4.1 – Définition du lacet C^1_{pm} $\Gamma_{\varepsilon,R}$

- On paramètre le chemin $C_{\varepsilon,R}$ par

$$\gamma_1 : \left| \begin{array}{ccc} [\theta_{\varepsilon,R}, 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \end{array} \right.$$

  On a alors

$$\begin{aligned} \int_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\ dz &= \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} f(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{i}R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,dt \\ &= \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} \frac{\mathrm{i}R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{R^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}(1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}dt \\ \int_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\ dz &= \mathrm{i}\int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} \frac{R^{1-x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-x)t}}{1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}dt \end{aligned}$$

  Or, au vu de son expression, $\theta_{\varepsilon,R}$ tend vers 0 quand ε tend vers 0, et la fonction intégrée est continue sur le compact $[0, 2\pi]$ donc

$$\int_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\ dz \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \frac{R^{1-x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-x)t}}{1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}dt.$$

  De plus, on a

$$\left| \frac{R^{1-x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-x)t}}{1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \right| \leq \frac{R^{1-x}}{R-1}$$

  donc

$$\left| \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \frac{R^{1-x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-x)t}}{1+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{1-x}}{R-1}dt = 2\pi\frac{R^{1-x}}{R-1} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  On en déduit que la contribution de $C_{\varepsilon,R}$ est asymptotiquement nulle.
- Le même raisonnement permet de voir que la contribution de c_ε est aussi asymptotiquement nulle :

$$\left| \int_{c_\varepsilon} f(z)\ dz \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\varepsilon^{1-x}}{1-\varepsilon}dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

– On paramètre le chemin $I^-_{\varepsilon,R}$ par

$$\gamma_2 : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & -\mathrm{i}\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}(1-t) \end{array} \right.$$

On a alors pour $t \in [0,1]$

$$\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2^x(t)(1+\gamma_2(t))} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{-R\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x}}{(R-Rt)^x(1+R-Rt)}$$

car l'argument de $-\mathrm{i}\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}(1-t)$ tend vers 2π, et de plus

$$\left|\frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2^x(t)(1+\gamma_2(t))}\right| \leq \frac{R}{(R-Rt)^x(1+R-Rt)}.$$

Donc en faisant tendre ε vers 0, puis en effectuant le changement de variable linéaire $u = R - Rt$ on obtient

$$\int_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)\ dz \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^R \frac{-\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x}}{u^x(1+u)} du.$$

– De manière analogue, on a

$$\int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)\ dz \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^R \frac{1}{u^x(1+u)} du$$

et, une nouvelle fois par convergence dominée, on a

$$\int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)\ dz + \int_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)\ dz \underset{\substack{\varepsilon\to 0 \\ R\to+\infty}}{\longrightarrow} (1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x}) I(x).$$

L'équation (1) se réécrit alors

$$2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x} = (1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x}) I(x)$$

et donc

$$I(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Étape 3. Formule des compléments sur $(0,1)$.

On va maintenant démontrer la formule des compléments sur $(0,1)$. On se donne donc $x \in (0,1)$. On a

$$\begin{array}{rcll} \Gamma(x)\Gamma(1-x) & = & \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt\right)\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} s^{-x}\,\mathrm{e}^{-s}\,ds\right) & \\ & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^{*2}} \left(\frac{t}{s}\right)^x \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-(t+s)}\,dsdt & \text{par théorème de Fubini-Tonelli} \\ & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^{*2}} v^x\,\mathrm{e}^{-u}\,\frac{1+v}{uv}\frac{u}{(1+v)^2}dudv & \text{par changement de variable [1]} \\ & = & \underbrace{\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,du\right)}_{1}\underbrace{\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} v^x\frac{dv}{v(1+v)}\right)}_{I(1-x)} & \text{par théorème de Fubini-Tonelli} \\ & = & I(1-x) & \\ & = & \dfrac{\pi}{\sin(\pi(1-x))} & \text{d'après l'étape 2} \\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) & = & \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)} & \end{array}$$

Ainsi, la formule est bien vraie sur l'intervalle $(0,1)$.

1. On pose $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^{*2} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^{*2} \\ (s,t) & \longmapsto & \left(t+s, \frac{t}{s}\right) \end{array}\right.$. On peut donner l'expression de sa bijection réciproque : $\varphi^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^{*2} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^{*2} \\ (u,v) & \longmapsto & \left(\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v}\right) \end{array}\right.$. De plus, son jacobien est $J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \frac{u}{(1+v)^2} > 0$, et c'est un C^1-difféomorphisme.

Étape 4. Prolongement analytique à Ω.

L'ensemble Ω est un ouvert connexe (par arcs) de $\mathbb{C}$, et la fonction $(z \longmapsto \Gamma(z)\Gamma(1-z))$ y est définie comme une fonction holomorphe. De plus, la fonction $\left(z \longmapsto \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)$ a ces mêmes caractéristiques. Donc, comme elles coïncident sur un intervalle ouvert non vide inclus dans Ω d'après l'étape 3, elles sont égales par principe de prolongement analytique. $\square$