3 Espace de Bergman

Leçons 201, 213, 234, 245(, 205, 208, 235, 243)

Ref : [Bernis & Bernis]

On étudie dans ce développement l'espace de Bergman du disque unité :

$$A^2(\mathbb{D}) := \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D}).$$

C'est bien sûr un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{D})$, qui est donc muni du produit scalaire usuel

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\ dxdy,$$

dont on note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

Théorème 1 L'espace de Bergman $A^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert, dont une base hilbertienne est donnée par les fonctions

$$e_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{n+1}{\pi}} z^n \end{array} \right. ,$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

Étape 1. Comparaison des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$.

On commence par démontrer un lemme qui donne un élément de comparaison entre les normes qui s'adaptent à la convergence des fonctions holomorphes et la norme sur L^2.

Lemme 2 Soit K un compact de $\mathbb{D}$. On a alors

$$\forall f \in A^2(\mathbb{D}) \qquad \|f\|_{\infty,K} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, \mathbb{S}^1)} \|f\|_2 .$$

On fixe $f \in A^2(\mathbb{D})$. Soit a un élément de K. Comme $\mathbb{D}$ est ouvert, il existe un certain réel $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans $\mathbb{D}$. On a alors, d'après la formule de la moyenne, pour tout $\rho \in (0, r)$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ d\theta.$$

On multiplie alors par ρ, puis on intègre sur $(0, r)$, et on obtient finalement

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\rho\ d\rho d\theta = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(a,r)} f(z)\ dxdy.$$

Mais on peut alors appliquer l'inégalité de Cauchy-Scwharz, pour obtenir

$$\begin{array}{rcl} |f(a)| & \leq & \dfrac{1}{\pi r^2} \left(\displaystyle\int_{B(a,r)} |f(z)|^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\displaystyle\int_{B(a,r)} dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \\ |f(a)| & \leq & \dfrac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f\|_2 \end{array}$$

On fait maintenant tendre r vers $d(a, \mathbb{S}^1)$ pour obtenir

$$|f(a)| \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{\pi} d(a, \mathbb{S}^1)}.$$

On conclut finalement en observant que $d(K, \mathbb{S}^1) \leq d(a, \mathbb{S}^1)$.

Étape 2. Complétude de l'espace de Bergman.

On se donne une suite de Cauchy $(f_n)_{n\geq 0}$ dans $A^2(\mathbb{D})$. Pour tout compact K de $\mathbb{D}$, et on a d'après le lemme

$$\forall m,n \in \mathbb{N} \qquad \|f_n - f_m\|_{\infty,K} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K,\mathbb{S}^1)} \|f_m - f_n\|_2 .$$

Cela signifie que la suite (f_n) est de Cauchy dans $C^0(K,\mathbb{C})$. Or on sait que la norme uniforme munit cet espace d'une structure de Banach, donc il existe une unique fonction f limite uniforme de la suite (f_n) sur chaque compact de $\mathbb{D}$. D'après le théorème de Weierstraß, on sait de plus que f est holomorphe sur $\mathbb{D}$.

Comme $L^2(\mathbb{D})$ est également complet, la suite (f_n) admet aussi une limite g dans $L^2(\mathbb{D})$. D'après le théorème de Riesz-Fisher, on sait aussi qu'il existe une suite extraite de (f_n) qui converge presque partout sur $\mathbb{D}$ vers g. Donc, puisque la suite (f_n) converge simplement (car uniformément) vers f, f et g coïncident presque partout sur $\mathbb{D}$. Ainsi, la suite (f_n) converge pour la norme L^2 (et donc celle que l'on a mise sur l'espace de Bergman) vers f, qui est donc un élément de $A^2(\mathbb{D})$.

Étape 3. Base hilbertienne de l'espace de Bergman.

On vérifie tout d'abord le caractère orthonormé : on se donne m et n deux entiers naturels, et on a

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m\rangle &= \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z}^m \, dxdy \\
&= \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \left(\int_0^1 r^{n+m+1} dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\, d\theta\right) \\
&= \frac{2\sqrt{(n+1)(m+1)}}{n+m+2}\delta_{n,m} \\
\langle e_n, e_m\rangle &= \delta_{n,m}
\end{aligned}$$

On se donne maintenant une fonction $f \in A^2(\mathbb{D})$ orthogonale à $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$c_n(f) := \langle f, e_n\rangle = 0.$$

Comme f est holomorphe, elle est analytique sur $\mathbb{D}$, et donc en 0 : il existe une famille $(a_n)_{n\geq 0}$ de complexes telle que

$$\forall z \in \mathbb{D} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On a alors une nouvelle expression du coefficient de f contre e_n :

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{z}^n \, dxdy \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \left(\int_{|z|<r} f(z)\overline{z}^n \, dxdy\right) && \text{par convergence dominée, car } |f(z)\overline{z}^n| \leq |f| \in L^1 \\
c_n(f) &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_{|z|<r} z^k\overline{z}^n \, dxdy\right) && \text{par convergence normale de la série entière}
\end{aligned}$$

On calcule alors l'intégrale obtenue en passant aux coordonnées polaires (comme plus haut), pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{|z|<r} z^k \overline{z}^n \, dxdy = \frac{2\pi r^{n+k+2}}{n+k+2}\delta_{k,n} = \frac{\pi}{n+1} r^{2(n+1)}\delta_{k,n}.$$

Finalement, on obtient

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \lim_{r\to 1}\left(a_n r^{2(n+1)}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n.$$

On en déduit que a_n est nul, et donc que f est nulle sur $\mathbb{D}$. Donc, par critère de densité, la famille $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $A^2(\mathbb{D})$. □

On peut, si le temps le permet, aller plus loin et démontrer l'énoncé suivant, qui donne l'existence d'un noyau de reproduction pour les fonctions de $A^2(\mathbb{D})$:

Proposition 3 On pose pour $(\zeta, z) \in \mathbb{D}^2$

$$K(\zeta, z) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-\zeta\,\overline{z})^2}.$$

Alors $K(\zeta, \cdot) \in A^2(\mathbb{D})$ pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$, et si T_K est l'opérateur à noyau associé à K sur $A^2(\mathbb{D})$, on a $T_K = \mathrm{Id}_{A^2(\mathbb{D})}$.

Démonstration. On voit tout d'abord que la fonction $K(\zeta, \cdot)$ est, à ζ fixé dans $\mathbb{D}$, holomorphe sur $\mathbb{D}$. De plus, la formule qui la définit donne une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, qui compact, et elle est donc de carré intégrable sur $\mathbb{D}$. Donc $K(\zeta, \cdot) \in A^2(\mathbb{D})$.

On se donne une fonction $f \in A^2(\mathbb{D})$. On veut montrer que $T_K f = f$, c'est-à-dire que pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$, on a

$$f(\zeta) = T_K f(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z)}{\pi(1-\zeta\,\overline{z})^2} dxdy = \left\langle f, \overline{K(\zeta, \cdot)} \right\rangle.$$

On cherche à calculer le produit scalaire obtenu par la formule de Parseval. On s'intéresse donc à la quantité

$$\left\langle e_n, \overline{K(\zeta, \cdot)} \right\rangle = \overline{\langle \overline{e_n}, K(\zeta, \cdot) \rangle} = \langle K(\zeta, \cdot), \overline{e_n} \rangle,$$

pour $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\langle K(\zeta, \cdot), \overline{e_n} \rangle &= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{D}} \frac{z^n}{(1-\zeta\,\overline{z})^2} dxdy \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{D}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \zeta^k \overline{z}^k \right)' z^n \; dxdy \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{D}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \zeta^k \overline{z}^k \right) z^n \; dxdy \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \zeta^k \int_{\mathbb{D}} \overline{z}^k z^n dxdy \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \zeta^k \frac{2\pi}{2k+2} \delta_{n,k} \\
\langle K(\zeta, \cdot), \overline{e_n} \rangle &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \zeta^n.
\end{aligned}$$

La formule de Parseval donne alors, en notant une nouvelle fois a_n les coefficients du développement analytique de f en 0 :

$$\begin{aligned}
T_K f(\zeta) &= \left\langle f, \overline{K(\zeta, \cdot)} \right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\langle f, e_n \rangle}_{c_n(f)} \left\langle e_n, \overline{K(\zeta, \cdot)} \right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \zeta^n \\
T_K f(\zeta) &= f(\zeta).
\end{aligned}$$

$\square$