11 Sommation d'Abel pour les séries de Fourier

Leçons 209, 235, 241, 246

Ref : [Bernis & Bernis]

On note $C^0_{\text{pm}}(0, 2\pi)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[0, 2\pi]$ étendues à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité, et $C^0(0, 2\pi)$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ étendues à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. On appelle également *régularisée* d'un élément $f \in C^0_{\text{pm}}(0, 2\pi)$ la fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x)_+ + f(x)_-\right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$f(x)_+$ et $f(x)_-$ désignant les limites respectivement à droite et à gauche de f en x. Ce développement consiste à démontrer le résultat suivant.

Proposition 1 Soit $f \in C^0_{\text{pm}}(0, 2\pi)$, et $r \in (0, 1)$. La série

$$c_0(f) + \sum_{n\geq 1} r^n \left(c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}\right)$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$, et on note f_r sa somme. On a de plus les résultats qui suivent :
- f_r converge simplement vers $\widetilde{f}$ sur $\mathbb{R}$, quand r tend vers 1_-
- si de plus f est continue sur $[0, 2\pi]$, alors f_r converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, quand r tend vers 1_-.

Démonstration. Étape 1. Convergence normale de la série.

On fixe $r \in (0, 1)$. On rappelle le lemme de Riemann-Lebesgue : les coefficients de Fourier de f tendent vers 0. En particulier, la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée, disons par $M > 0$. On a alors

$$\left|r^n \left(c_n(f)e_n(x) + c_{-n}(f)e_{-n}(x)\right)\right| \leq 2Mr^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, comme la série $2M\sum_{n\geq 1} r^n$ converge dans $\mathbb{R}$ puisque $|r| < 1$, la série

$$c_0(f) + \sum_{n\geq 1} r^n \left(c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}\right)$$

converge normalement, et on peut donc définir la somme f_r de sa série (car elle est à valeurs dans $\mathbb{C}$, qui est complet).

Étape 2. Introduction des noyaux de Poisson.

On cherche ici à exprimer f_r comme un produit de convolution. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{e}^{inx}\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{int}\, \mathrm{e}^{-inx}\, dt\right).$$

On rappelle que l'on raisonne à x fixé, et on pose

$$\varphi_n(t) := r^n f(t)\left(\mathrm{e}^{in(x-t)} + \mathrm{e}^{in(t-x)}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

de sorte que

$$f_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\, dt.$$

On a, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $|\varphi_n(t)| \leq 2\,\|f\|_\infty\, r^n$, et donc, toujours car $|r| < 1$, la série $\sum_{n\geq 1}\varphi_n$ converge normalement sur le segment $[-\pi, \pi]$. D'après le théorème d'interversion série-intégrale, puisque les fonctions φ_n sont également continues, et donc intégrables sur $[-\pi, \pi]$, alors on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_n(t)\right)\, dt,$$

et donc
$$f_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-t)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(x-t)}\right)dt\right).$$
On reconnaît alors le produit de convolution recherché : si on définit
$$P_r(x) = 1+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right),$$
alors on a
$$f_r(x) = f * P_r(x).$$
On appelle les P_r *noyaux de Poisson*, et on a en calculant la somme infinie
$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}.$$
En particulier, P_r hérite de la parité du cosinus en x.

Étape 3. Approximation de l'unité.

On va montrer que $(P_r)_{r\in(0,1)}$ vérifie trois axiomes qui font qu'elle est une approximation de l'unité améliorée.

(i) **P_r est positif, pour tout $r \in (0,1)$.**
Le numérateur de P_r est bien positif. On étudie le dénominateur. On cherche donc le signe du trinôme $1-2X\cos(x)+X^2$ sur $\mathbb{R}$. Son discriminant est $\Delta = 4(\cos^2(x)-1) \geq 0$, donc le trinôme est bien positif ou nul sur $(0,1)$ (et même strictement positif en étudiant le cas d'égalité).

(ii) **P_r est d'intégrale 2π, pour tout $r \in (0,1)$.**
On prend simplement à cette endroit de la preuve $f \equiv 1$. On a alors
$$\begin{cases} c_0(f) = 1 \\ c_n(f) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^\times \end{cases}$$
Ainsi, on a
$$1 = f_r(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt.$$

(iii) **P_r se concentre en 0.**
Ici, on va montrer précisément
$$\forall \delta \in (0,\pi) \quad \sup_{x\in(-\pi,-\delta)\cup(\delta,\pi)} |P_r(x)| \underset{r\to 1_-}{\longrightarrow} 0. \tag{1}$$
On se donne donc $\delta \in (0,\pi)$. Comme r est positif et le cosinus décroissant sur $[0,\pi]$, on a pour $x \in (\delta,\pi)$
$$1-2r\cos(x)+r^2 \geq 1-2r\cos(\delta)+r^2 \geq 0.$$
Par parité de P_r, on en déduit
$$\sup_{x\in(-\pi,-\delta)\cup(\delta,\pi)} |P_r(x)| \leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\delta)+r^2},$$
et en faisant tendre r vers 1, on déduit (1).

En plus de ces trois résultats, on déduit par parité de P_r, en utilisant (ii), le résultat suivant :
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} P_r(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(t)\,dt = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Étape 3. Convergence simple vers la régularisée.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On étudie la convergence de $(f_r(x))_{r\in(0,1)}$. En utilisant (2), on remarque que pour $r \in (0,1)$, on a
$$\begin{aligned} f_r(x)-\widetilde{f}(x) &= P_r * f(x) - \frac{1}{2}\left(f(x)_+ + f(x)_-\right) && \text{par commutativité de } * \\ f_r(x)-\widetilde{f}(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} P_r(t)\left(f(x-t)-f(x)_+\right)dt + \int_0^{\pi} P_r(t)\left(f(x-t)-f(x)_-\right)dt\right) \end{aligned}$$

On fixe alors $\varepsilon > 0$. Par définition des limites $f(x)_+$ et $f(x)_-$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \pi)$ tel que

$$\begin{cases} \forall t \in (-\delta, 0) & |f(x-t) - f(x)_+| \leq \varepsilon \\ \forall t \in (0, \delta) & |f(x-t) - f(x)_-| \leq \varepsilon \end{cases}$$

On a alors, comme P_r est positif (2.(i)), et en utilisant l'expression précédente,

$$\begin{aligned} \left| f_r(x) - \widetilde{f}(x) \right| \quad \leq \quad & \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t) \, |f(x-t) - f(x)_+| \, dt + \int_{-\delta}^{0} P_r(t) \, |f(x-t) - f(x)_+| \, dt \right. \\ & \left. + \int_{0}^{\delta} P_r(t) \, |f(x-t) - f(x)_-| \, dt + \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) \, |f(x-t) - f(x)_-| \, dt \right). \end{aligned}$$

Une nouvelle fois, la positivité de P_r permet d'affirmer, en appliquant aussi le point 2.(ii) ainsi que (2),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{0} P_r(t) \, |f(x-t) - f(x)_+| \, dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{0} P_r(t) \ dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} P_r(t) \ dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et de même

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\delta} P_r(t) \, |f(x-t) - f(x)_-| \, dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} P_r(t) \, |f(x-t) - f(x)_+| \, dt \leq 2(\pi - \delta) \, \|f\|_\infty \sup_{x \in (-\pi, -\delta)} P_r(x) \leq 2\pi \, \|f\|_\infty \sup_{x \in (-\pi, -\delta) \cup (\delta, \pi)} P_r(x)$$

et de même

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} P_r(t) \, |f(x-t) - f(x)_-| \, dt \leq 2\pi \, \|f\|_\infty \sup_{x \in (-\pi, -\delta) \cup (\delta, \pi)} P_r(x).$$

Ainsi, en se donnant grâce à la convergence (1) un réel $r_0 = r_0(\delta) = r_0(\varepsilon) \in (0, 1)$, tel que pour tout $r \in (r_0, 1)$ on a

$$\sup_{x \in (-\pi, -\delta) \cup (\delta, \pi)} P_r(x) \leq \varepsilon,$$

on obtient pour $r \in (r_0, 1)$

$$\left| f_r(x) - \widetilde{f}(x) \right| \leq \varepsilon \left(1 + 4\pi \, \|f\|_\infty\right).$$

On en déduit bien que $f_r(x)$ tend vers $\widetilde{f}(x)$ quand r tend vers 1_-.

Étape 4. Convergence uniforme vers f.

Le problème vient ici du fait que l'on a raisonné dans toute l'étape 3 à x fixé, ce qui implique que δ et r_0 dépendent également de x. On doit donc s'affranchir de cette dépendance en utilisant un argument de continuité uniforme. Ici, la périodicité de f nous sauve : pour démontrer le point (ii) de la proposition, on suppose que f est continue sur $[0, 2\pi]$; d'après le théorème de Heine, elle est y est donc uniformément continue, et sa périodicité permet d'affirmer qu'elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Cette fois, on dispose donc de $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \left(|x - y| \leq \delta_0 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\right.$$

On peut une nouvelle fois choisir de prendre $\delta_0 \in (0, \pi)$ (quitte à le diminuer), et donc on a cette fois par la convergence (1) l'existence de $r_0 \in (0, 1)$ qui ne dépend cette fois plus que du réel ε tel que pour $r \in (r_0, 1)$

$$\sup_{x \in (-\pi, -\delta_0) \cup (\delta_0, \pi)} P_r(x) \leq \varepsilon.$$

Un calcul presque identique à celui de l'étape 3 donne alors

$$\left| f_r(x) - \widetilde{f}(x) \right| \leq \varepsilon \left(1 + 4\pi \, \|f\|_\infty\right),$$

mais cette fois-ci pour tout réel x, ce qui permet de conclure sur le point (ii) de la proposition. $\square$