1 Banach-Steinhauß et séries de Fourier

Leçons 205, 208, 246(, 241)

Ref : [Bernis & Bernis]

La convergence des séries de Fourier pose souvent problème, et les théorèmes nécessitent des hypothèses plus forte que la simple continuité de la fonction étudiée. Ce développement permet justement d'affirmer que l'hypothèse de classe C^1 par morceaux du théorème de Dirichlet est nécessaire, et qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas. Plus précisément, s'il est possible de donner un contre-exemple explicite, on va ici utiliser un résultat d'analyse fonctionnelle pour montrer qu'il en existe en fait beaucoup.

On peut donner deux versions de ce développement, selon les leçons dans lesquelles on souhaite le placer. Un premier axe consiste à démontrer le théorème de Banach-Steinhauß puis le premier théorème sur les séries de Fourier, pour les leçons 205 et 208. La seconde option demande d'admettre Banach-Steinhauß pour prendre le temps de démontrer le résultat plus précis sur les séries de Fourier, qui est le deuxième point du développement rédigé dans [Bernis & Bernis], ce qui colle très bien avec la leçon 246, et qui peut rentrer éventuellement dans la 241.

Théorème 1 (Banach-Steinhauß) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé, et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E vers F. Alors l'une (et une seule) des affirmations suivantes est vérifiée :

(i) la famille $(T_i)_{i\in I}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E, F)$

(ii) il existe un G_δ dense D de E tel que

$$\forall x \in A \quad \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F = +\infty.$$

Démonstration. On rappelle qu'un G_δ est une intersection dénombrable d'ouverts de E. Il est clair que les deux assertions proposées sont contradictoires. Dans la suite, on cherche donc à montrer que l'une des deux est vérifiée, et l'autre ne l'est donc pas. On pose pour $n \geq 1$

$$D_n := \left\{ x \in E,\ \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F > n \right\}.$$

On voit que D_n est l'union d'ensembles de la forme $\{x \in E,\ \|T_i(x)\|_F > n\}$, qui sont des ouverts de E en tant qu'image réciproque d'ouverts de $\mathbb{R}$ par des applications continues. Donc D_n est un ouvert de E. On traite alors deux cas.

– **1er cas :** Tous les D_n sont denses dans E.
On applique alors le théorème de Baire (c'est licite car E est complet). L'ensemble

$$D := \bigcap_{n\geq 1} D_n$$

est dense, et c'est par définition un G_δ. De plus, par définition, D vérifie le point (ii) du théorème.

– **2è cas :** Il existe un entier n_0 tel que D_{n_0} n'est pas dense dans E.
Alors il existe $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tel que $D_n \cap B(x_0, r_0) = \emptyset$. On en déduit

$$\forall x \in B(x_0, r_0)\ \forall i \in I \quad \|T_i(x)\|_F \leq n_0.$$

Ainsi, pour x dans la boule unité de E, on a

$$r_0 \|T_i(x)\|_F = \|T_i(r_0 x)\|_F \leq \|T_i(r_0 x + x_0)\|_F + \|T_i(x_0)\|_F \leq 2n_0.$$

Donc tous les T_i sont de norme inférieure à $\dfrac{2n_0}{r_0}$, et on est dans le cas (i).

□

Application 2 Il existe un G_δ dense D de $\left(C^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty\right)$ (espace des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, muni de la norme uniforme) tel que pour toute fonction $f \in D$, la somme partielle de la série de Fourier [1]

$$S_N(f) = D_N * f = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$$

diverge en 0.

Démonstration. On note E l'espace donné dans l'énoncé, qui est de Banach. On note aussi $F = (\mathbb{C}, |\cdot|)$, et on pose pour $N \geq 0$

$$T_N : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & S_N(f)(0) \end{array} \right.$$

Les applications T_N sont bien sûr linéaires. On va montrer qu'elles sont continues : soit $N \geq 0$ et $f \in E$. On a

$$|T_N(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(-t) f(t)| \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)||f(t)| \, dt \leq \|f\|_\infty \|D_N\|_{L^1},$$

en utilisant la parité des noyaux de Dirichlet. Donc T_N est continue et de norme inférieure à $\|D_N\|_{L^1}$. On va montrer que l'on a trouvé la bonne norme. Pour exhiber un élément qui tel que l'inégalité du dessus soit une égalité, il faudrait que f soit du signe de D_N, et de valeur absolue constante ; mais c'est impossible pour une fonction continue, puisque D_N change de signe. On va cependant créer une approximation du signe de D_N : on note, pour $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{D_N(t)}{|D_N(t)| + \varepsilon} \end{array} \right.$$

On voit que f_ε converge simplement vers le signe de D_N, et est majoré par 1. Ainsi, la quantité $\dfrac{(D_N(t))^2}{|D_N(t)| + \varepsilon}$ converge simplement à t fixé vers $|D_N(t)|$ quand ε tend vers 0, et est borné par $|D_N(t)|$, qui est intégrable et indépendante de ε. Donc, par convergence dominée, on a

$$T_N(f_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(D_N(t))^2}{|D_N(t)| + \varepsilon} dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \|D_N\|_{L^1},$$

et donc T_N est de norme $\|D_N\|_{L^1}$. On s'intéresse maintenant à la norme obtenue. On a, pour $N \geq 0$

$$\begin{array}{rcll} \|D_N\|_{L^1} & = & \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-pi}^{\pi} \left| \dfrac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right| dt & \\ & = & \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\pi} \left| \dfrac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right| dt & \text{par parité} \\ & \geq & \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\pi} \left| \dfrac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) t\right)}{t} \right| dt & \text{car } \sin\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{t}{2} \\ \|D_N\|_{L^1} & \geq & \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{0}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi} \left| \dfrac{\sin(u)}{u} \right| du & \text{par changement de variable } u = \left(N + \frac{1}{2}\right) t \end{array}$$

Or l'intégrale obtenue diverge, donc la norme de D_N, et donc celle de T_N, tend vers l'infini quand N tend vers l'infini. En appliquant le théorème de Banach-Steinhauß aux applications $(T_N)_{N \geq 0}$, on voit que l'on ne peut donc pas être dans le cas (i), et qu'il existe donc un G_δ dense D de $C^0(\mathbb{T})$ tel que pour tout élément f de D, la suite $(S_N(f)(0))_{N \geq 0}$ n'est pas bornée, et donc la somme partielle de la série de Fourier de f diverge. □

On peut même obtenir un résultat plus fort.

Application 3 Il existe un G_δ dense $\widetilde{D}$ de $\left(C^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty\right)$ tel que pour toute fonction $f \in \widetilde{D}$, il existe un G_δ dense Δ_f de $\mathbb{R}$ tel que la série de Fourier de f diverge en tout point de Δ_f.

1. On définit auparavant les polynômes trigonométriques $e_n(t) = \mathrm{e}^{int}$ et les noyaux de Dirichlet D_N.