8 Groupes d'isométries du tétraèdre et du cube

Leçons 101, 105, 161, 191

Ref : [H2G2 Tome 1], XII Prop 3.12 & Prop 3.15

Ce développement consiste à étudier les groupes d'isométries laissant stables le tétraèdre et le cube.

Si C est un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$, on appelle groupe d'isométries de C, et on note $\mathrm{Iso}(C)$, l'ensemble des isométries affines de $\mathbb{R}^n$ laissant stable l'ensemble C. On note aussi $\mathrm{Iso}^+(C)$ l'ensemble des isométries affines positives de $\mathrm{Iso}(C)$. On appelle Δ_4 le tétraèdre régulier et C_8 le cube, qui sont deux ensembles de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 1 Le groupe des isométries du tétraèdre est $\mathrm{Iso}(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4$, et le groupes des isométries positives du tétraèdre est $\mathrm{Iso}^+(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4$.

Démonstration. On note A, B, C et D les sommets du tétraèdre, comme sur la figure 8.1a. On définit le morphisme

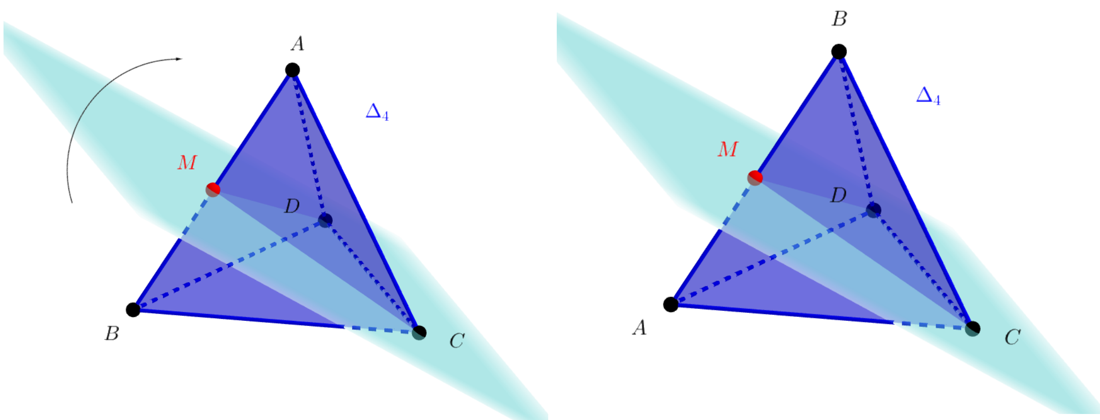
$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Iso}(\Delta_4) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(A,B,C,D) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ f & \longmapsto & f_{|\{A,B,C,D\}} \end{array} \right.$$

Ce morphisme est bien défini puisque $\{A, B, C, D\}$ est par définition stable par les éléments de $\mathrm{Iso}(\Delta_4)$. On va montrer que φ est bijectif.

- On se donne f tel que $\varphi(f)$ est l'identité. Puisque les vecteurs AB, AC, et AD forment une base de $\mathbb{R}^3$, l'image de f sur cette base caractérise f, et donc f est l'identité sur $\mathbb{R}^3$. Donc φ est injectif.
- On veut maintenant montrer que φ est surjectif. On cherche tout d'abord un antécédent à la permutation $(A\ B)$. On doit trouver une isométrie qui échange A et B sans toucher à C et D. On note alors M le milieu de $[AB]$, et on considère la réflexion de plan (CDM), qui est bien une isométrie, et qui effectue exactement les déplacements recherchés. Donc $(A\ B)$ est dans l'image de φ, et par symétrie de la figure, toutes les transpositions aussi. Or les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_4$, donc tous les éléments de $\mathfrak{S}_4$ sont dans l'image. Donc φ est surjectif.

On en déduit donc que le groupe des isométries du tétraèdre est $\mathfrak{S}_4$.

De plus, comme $SO_3(\mathbb{R})$ est d'indice 2 dans $O_3(\mathbb{R})$, et comme par symétrie centrale de Δ_4, tout élément de $\mathrm{Iso}^+(\Delta_4)$ correspond bijectivement à un élément de $\mathrm{Iso}^-(\Delta_4)$, $\mathrm{Iso}^+(\Delta_4)$ est aussi d'indice 2 dans $\mathrm{Iso}(\Delta_4)$. Or le seul sous-groupe d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_4$ est $\mathfrak{A}_4$, donc $\mathrm{Iso}^+(\Delta_4) = \mathfrak{A}_4$.



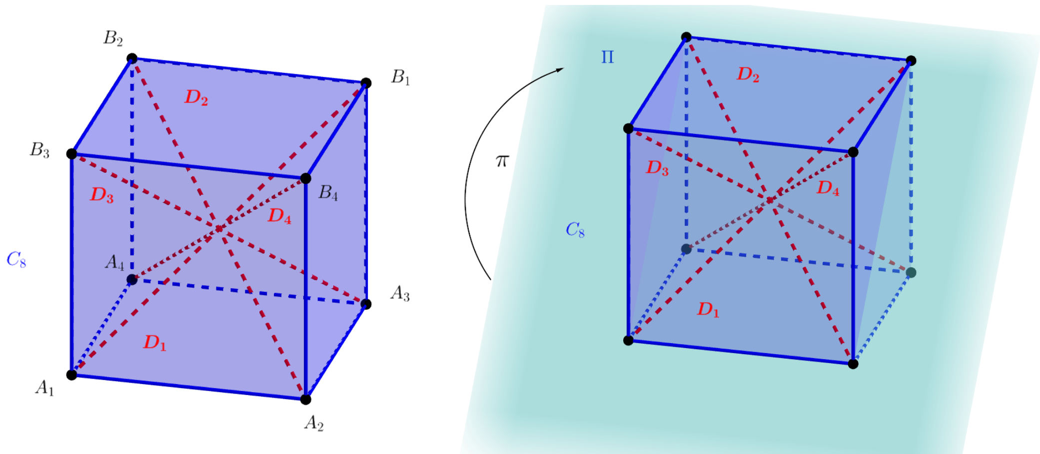
(a) Tétraèdre régulier Δ_4 et plan (CDM)

(b) Tétraèdre après transformation par la réflexion de plan (CDM)

FIGURE 8.1 – Tétraèdre régulier Δ_4 et isométries

□

Théorème 2 Le groupe des isométries du cube est $\mathrm{Iso}(C_8) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et le groupe des isométries positives du cube est $\mathrm{Iso}^+(C_8) \simeq \mathfrak{S}_4$.



(a) Cube C_8 et grandes diagonales

(b) Cube et transformation par la rotation du plan Π

FIGURE 8.2 – Cube C_8 et isométries

Démonstration. On numérote les sommets du cube selon la figure 8.2a. On remarque tout d'abord que toute isométrie laissant stable le cube doit laisser stable les quatre grandes diagonales $D_i = [A_i B_i]$. En effet, comme une isométrie conserve les distances, et comme les couples (A_i, B_i) sont les couples de points les plus éloignés de C_8, l'ensemble de ces couples est stable par toute isométrie du cube. On définit alors le morphisme de groupe

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Iso}^+(C_8) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(\mathcal{D}) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ f & \longmapsto & f_{|\mathcal{D}} \end{array} \right.$$

où $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des couples (A_i, B_i). On va montrer que φ est un isomorphisme.

- On se donne f tel que $\varphi(f)$ est l'identité, et on suppose par l'absurde que f n'est pas l'identité. Comme f n'est pas l'identité, l'un des sommets A_i de la face du bas n'est pas stable par f (sinon, pour conserver les diagonales, f doit laisser stables tous les points du cube, et donc f est l'identité). Mais alors, $f(A_i) = B_i$ puisque l'ensemble $\{A_i, B_i\}$ est stable par f. Mais comme f conserve les distances, cela implique que pour tout $j \in [\![1, 4]\!]$, $f(A_j) = B_j$. On en déduit que f est l'opposée de l'identité, ce qui est absurde puisque cette isométrie est négative. Donc f est l'identité, et φ est injectif.
- On note maintenant Π le plan engendré par les diagonales D_1 et D_2, et on considère la rotation ρ d'angle π autour de autour de l'axe orthogonal à Π passant par le centre O du cube (qui est bien une isométrie positive). Alors, comme on le voit sur la figure 8.2b, D_1 et D_2 sont stables, mais D_3 et D_4 sont échangées. On en déduit que $\varphi(\rho) = (D_3\ D_4)$. Un raisonnement similaire sur les autres couples de diagonales successives montre que toutes les transpositions $(D_i\ D_{i+1})$ sont dans $\varphi(\mathrm{Iso}^+(C_8))$. Or ces transpositions engendrent $\mathfrak{S}(\mathcal{D})$, donc φ est surjectif.

On en déduit bien que $\mathrm{Iso}^+(C_8) \simeq \mathfrak{S}_4$.

Par le même argument que précédemment, $\mathrm{Iso}^+(C_8)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{Iso}(C_8)$. En particulier, il est distingué. De même, le sous-groupe $\{\pm \mathrm{Id}\}$ est distingué puisque l'identité et son opposée commutent avec toutes les isométries de $\mathbb{R}^3$. De plus, l'intersection de ces deux groupes est triviale, et toute isométrie du cube est soit positive, soit opposée d'une isométrie positive. On en déduit que le groupe des isométrie du cube est le produit direct de ces deux groupes :

$$\mathrm{Iso}(C_8) = \mathrm{Iso}^+(C_8) \times \{\pm \mathrm{Id}\} \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

$\square$