6 Décomposition polaire et applications

Leçons 106, 155, 158, 160(, 150)

Ref : [H2G2 Tome 1] VI.1+[Oraux X-ENS Algèbre 3] 2.28

Ce développement consiste à démontrer le théorème analogue à celui de décomposition polaire dans $\mathbb{C}$: on sait bien sûr que tout élément de $\mathbb{C}^*$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = \rho\, \mathrm{e}^{i\theta}$, pour $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi)$. On va donc démontrer le théorème suivant, en se plaçant cette fois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note ici $H_n = H_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $H_n^{++} = H_n^{++}(\mathbb{C})$ son sous-espace des matrices définies positives, et $U_n = U_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices unitaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On peut adapter ce développement pour qu'il rentre plus dans le cadre des leçons dans lesquelles on veut le présenter. Par exemple, il est plus judicieux de présenter le théorème et la démonstration (qui est la même) sous leur forme réelle dans le cadre de la leçon 160. De plus, les deux corollaires présentés en fin de développements sont deux applications dont les démonstrations prennent des durées différentes, ce qui permet de moduler en fonction du temps restant à l'issu de la démonstration du théorème de décomposition polaire. Enfin, si l'on n'a pas d'autre idée de développement pour la leçon 150, on peut toujours l'y faire figurer, en donnant l'énoncé sous la forme "action de groupes" : le théorème montre que les éléments de $H_n^{++}(\mathbb{C})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) caractérisent les orbites de l'action à droite (resp. à gauche) de $U_n(\mathbb{C})$ (resp. $O_n(\mathbb{R})$) sur $GL_n(\mathbb{C})$ (resp. $GL_n(\mathbb{R})$).

Théorème 1 L'application

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} H_n^{++}\times U_n & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ (H,Q) & \longmapsto & HQ \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme. En particulier, tout élément M de $GL_n(\mathbb{C})$ s'écrit donc de manière unique sous la forme

$$M = R\exp(\mathrm{i}\Theta),$$

avec $R \in H_n^{++}$ et $\Theta \in H_n$.

Démonstration. Étape 1. Surjectivité de Φ.

On se donne $M \in GL_n(\mathbb{C})$. On remarque tout d'abord que MM^* est hermitienne définie positive. En effet, on a

- $(MM^*)^* = M^{**}M^* = MM^*$
- si X est un vecteur non nul de $\mathbb{C}^n$, alors $\langle MM^*X, X\rangle = \langle M^*X, M^*X\rangle = \|M^*X\|^2 > 0$, car M^* est inversible.

Ainsi, d'après le théorème spectral, il existe une matrice unitaire $U \in U_n$ qui diagonalise MM^*, c'est à dire qu'il existe des réels $d_1, .., d_n$ tous strictement positifs tels que

$$MM^* = U^*DU,$$

avec $D = \mathrm{diag}(d_i)_{1\le i\le n}$. On note alors $\sqrt{D} := \mathrm{diag}(\sqrt{d_i})_{1\le i\le n}$, et on pose

$$H := U^*\sqrt{D}U.$$

On voit alors que puisque U est unitaire, $H^2 = MM^*$. On pose alors $Q := H^{-1}M$, de sorte que l'on a $HQ = M$. Comme on a $H^* = H$, H est hermitienne. De plus, ses valeurs propres sont des réels strictement positifs (les $\sqrt{d_i}$), donc elle est définie positive. On a également $Q^*Q = M^*H^{-2}M = I_n$, donc Q est unitaire. On en déduit que $M = \Phi(H, Q)$.

Étape 2. Injectivité de Φ.

On se donne une seconde décomposition $M = H'Q'$ de M dans $H_n^{++}\times U_n$. On a alors

$$M^* = (H'Q')^* = Q'^*H'^* = Q'^{-1}H'.$$

On en déduit que $MM^* = H'^2$. Or on a déjà vu que $MM^* = H^2$. On se donne un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ qui interpole les d_i sur les $\sqrt{d_i}$. On a alors $H = U^*P(D)U = P(U^*DU) = P(MM^*) = P(H'^2)$. Donc H est un polynôme en H', et donc H et H' commutent. Mais comme elles sont toutes les deux diagonalisables (d'après le théorème spectral), elles sont codiagonalisables. Il existe donc deux familles $(h_i)_{1\le i\le n}$ et $(h'_i)_{1\le i\le n}$ de réels strictement positifs et une matrice $R \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} H = R^{-1}\mathrm{diag}(h_i)R \\ H' = R^{-1}\mathrm{diag}(h'_i)R \end{array} \right.$$

Mais comme $H^2 = H'^2$, on doit donc avoir $h_i^2 = h_i'^2$ pour tout i, et donc $h_i = h_i'$ puisque ces coefficients sont des réels positifs. Finalement, on obtient $H = H'$. On en déduit également $Q = Q'$. Donc Φ est injective.

Étape 3. Continuité de Φ^{-1}.

Puisque le produit matriciel est continu, Φ l'est. Il reste à montrer que Φ^{-1} l'est aussi. Puisque l'on se trouve dans des espaces métriques, on va montrer qu'elle est séquentiellement continue. On se donne donc une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$, qui converge dans $GL_n(\mathbb{C})$ vers M. On note également pour tout k

$$M_k = H_k Q_k$$

la décomposition polaire de M_k, et de même $M = HQ$. On sait que l'espace U_n est compact, car fermé et borné (et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie). Donc la suite $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, que l'on note A. Il existe donc une extractrice φ telle que la suite $(Q_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A. Par continuité du produit matriciel, la suite $(H_{\varphi(k)})_{k\ni\mathbb{N}}$ converge alors vers $S := MA^*$. Comme l'espace H_n^+ des matrices semi-définies positives est fermé, et S est limite d'une suite d'éléments de $H_n^{++} \subset H_n^+$, elle est semi-définie positive, et elle est aussi inversible puisque M et A^* le sont, donc elle est finalement définie positive. Donc SA est une décomposition polaire de M. Ainsi, par unicité, on a $S = H$ et $A = Q$. Ainsi, la valeur d'adhérence est unique, ce qui prouve que la suite $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers Q, et donc $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers H. □

Exemple. On prend $M = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$. On a alors

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \exp\left(\mathrm{i} \begin{pmatrix} \dfrac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} \right),$$

ce qui donne une décomposition polaire de M sous la forme $M = H \exp \mathrm{i}\Theta$.

La version réelle du théorème est aussi valable.

Théorème 2 L'application

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (S, O) & \longmapsto & OS \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme.

Corollaire 3 Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $|||A|||_2 = \sqrt{\rho\left({}^t\!AA\right)}$.

Démonstration. Soit $A = OS \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors comme $O \in O_n(\mathbb{R})$, on a $\|Ax\| = \|Sx\|$ pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. On a donc $|||A|||_2 = |||S|||_2$. Comme S est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, .., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, composée de vecteurs propres pour les valeurs correspondantes, qui sont positives strictement, $\lambda_1 \geq .. \geq \lambda_n > 0$. Soit alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de norme 1, on a

$$\|Sx\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \right\|^2 \leq |\lambda_1|^2 \|x\|^2 = |\lambda_1|.$$

De plus, le cas d'égalité est atteint pour $x = e_1$. Donc $|||S|||_2 = \rho(s)$. On en déduit :

$$|||A|||_2 = |||S|||_2 = \rho(S) = \sqrt{\lambda_1^2} = \sqrt{\rho(S^2)} = \sqrt{\rho({}^t\!AA)}$$

car ${}^t\!AA =^t S^t OOS = S^2$. □

Corollaire 4 Les points extrêmaux de la boule unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont exactement les éléments de $U_n(\mathbb{C})$.

Démonstration.

- Montrons que $Q \in U_n(\mathbb{C})$ est extrêmal. Supposons que $Q = A + B$, avec A, B deux éléments de norme inférieure à 1. On a pour $x \in E$ unitaire

$$\|x\| = \|Qx\| = \frac{1}{2}\|Ax + Bx\| \leq \frac{1}{2}(\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \frac{1}{2}(|||A||| + |||B|||) \leq 1.$$

  Comme x est de norme 1, toutes les inégalités sont des égalités. On en déduit que A et B sont de norme 1, que Ax et Bx sont de norme 1, et qu'ils sont positivement liés. Ainsi, on a nécessairement $Ax = Bx$, et donc $A = B$ car ceci est vrai pour tout vecteur unitaire. Donc Q est extrêmal.

- Réciproquement, si A est de norme inférieure à 1 et non unitaire, on écrit $A = HQ$ la décomposition polaire de A (ici, H est seulement semi-définie positive). Comme H est hermitienne, elle est orthodiagonalisable : il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ et D diagonale à coefficients réels telles que $H = P^*DP$. Comme $|||H||| = |||A|||$, les coefficients diagonaux λ_i sont tous compris entre -1 et 1. De plus, comme A n'est pas unitaire, au moins l'un des λ_i (supposons que c'est λ_1) est strictement compris entre -1 et 1. On pose alors $\lambda_1 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ avec $\alpha \neq \beta \in [-1, 1]$, et on note $D' = \text{diag}(\alpha, \lambda_2, ..\lambda_n)$ et $D'' = \text{diag}(\beta, \lambda_2, ..\lambda_n)$. Alors $A = \dfrac{1}{2}(P^*D'PQ + P^*D''PQ)$. On a de plus, pour x unitaire

$$\|P^*D'PQx\|^2 = \|D'PQx\|^2 \leq |||D'|||^2 \|PQx\|^2 \leq 1,$$

  donc $P^*D'PQ$ est dans la boule unité, ainsi que $P^*D''PQ$. Donc A est combinaison convexe de deux éléments de la boule, et n'est donc pas extrêmal.

□