3 Coniques passant par six points

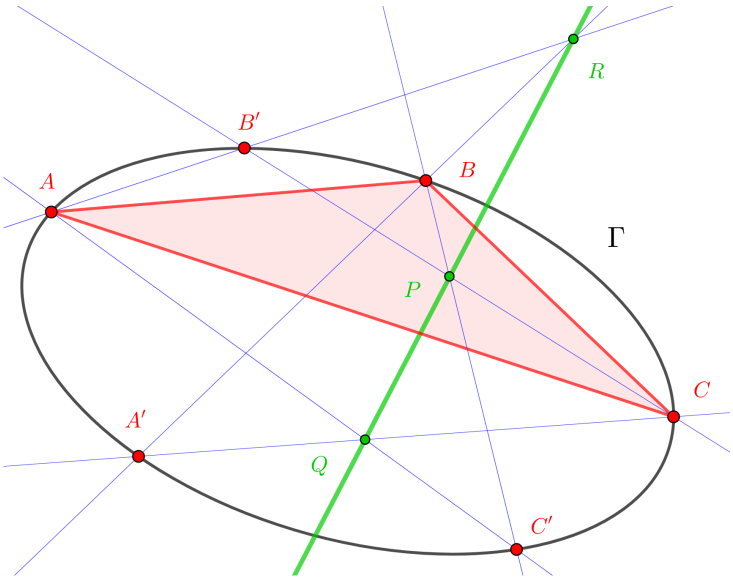
Leçons 152, 171, 181(, 162, 191)

Ref : [Eiden] II.2.1 et II.3

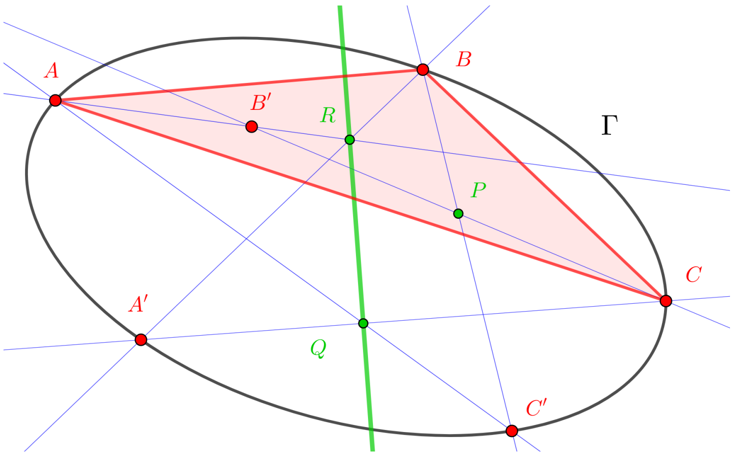
On démontre ici le théorème de Pascal et une application à l'existence d'une conique passant par six points dans certains cas. On a plusieurs options pour ce développement. On peut l'axer coniques et barycentres, en démontrant le théorème de Pascal et son application, ou bien démontrer seulement l'application, sans utiliser le théorème, et en étudiant un déterminant 6×6 qui se calcule par blocs (plutôt pour la leçon 152 donc), comme c'est fait dans la foulée dans [Eiden].

Théorème 1 (Pascal) On se donne six points A, B, C, A', B' et C', les trois premiers étant non alignés. On note P, Q et R les intersections respectives des droites (BC') et $(B'C)$, (AC') et $(A'C)$, et (AB') et $(A'B)$. Alors P, Q et R sont alignés si et seulement si par les six points A, B, C, A', B' et C' passe une conique.

Remarque 2 La situation est résumée sur la figure 3.1 : on a tracé dans les deux cas l'unique conique Γ passant par les points A, B, C, A' et C'. Dans le premier cas, on voit qu'elle passe aussi par B', et que les trois points verts sont alignés ; dans le second cas, le point P n'est pas sur la droite RQ et le point B' n'est pas sur la conique.



(a) Cas favorable



(b) Cas défavorable

Figure 3.1 – Illustration du théorème de Pascal pour les coniques

Démonstration.

Étape 1. Équation barycentrique d'une conique passant par A, B et C.

On se place dans le repère barycentrique (A,B,C), relié au repère cartésien $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ par les relations suivantes :

– un point de coordonnées cartésiennes (u,v) est de coordonnées barycentriques (X,Y,Z), avec $X = 1-u-v, Y=u$ et $Z=v$,

– un point de coordonnées barycentriques (X,Y,Z) est de coordonnées cartésiennes (u,v), avec $u = \dfrac{Y}{X+Y+Z}$ et $v = \dfrac{Z}{X+Y+Z}$.

On se donne une conique d'équation

$$\alpha_1 u^2 + \alpha_2 uv + \alpha_3 v^2 + \beta_1 u + \beta_2 v + \gamma = 0,$$

avec donc α_1, α_2 et α_3 non tous nuls. En passant aux coordonnées barycentriques, on obtient

$$\gamma X^2 + (\alpha_1+\beta_1+\gamma)Y^2 + (\alpha_3+\beta_2+\gamma)Z^2 + (\beta_1+2\gamma)XY + (\beta_2+2\gamma)XZ + (\alpha_1+\beta_1+\beta_2+2\gamma)YZ = 0.$$

Or on veut que A, B et C soient sur la conique, on en déduit que les coefficients en X^2, Y^2 et Z^2 sont nuls (en écrivant respectivement que $A: \ (1,0,0)$, $B: \ (0,1,0)$ et $C: \ (0,0,1)$ vérifient l'équation). Ainsi, l'équation devient

$$pXY + qXZ + rYZ = 0,$$

avec p,q,r non tous nuls. Réciproquement, on voit en remontant de cette équation aux coordonnées cartésiennes qu'on obtient bien l'équation d'une conique contenant les points A, B et C.

Étape 2. Condition équivalente d'existence de la conique.

Si une conique de la forme recherchée dans l'énoncé existe, en notant $(x,y,z), (x',y',z')$ et (x'',y'',z'') les coordonnées barycentriques de A', B' et C', il existe des coefficients p,q,r non tous nuls tels que

$$\begin{cases} pxy + qxz + ryz = 0 \\ px'y' + qx'z' + ry'z' = 0 \\ px''y'' + qx''z'' + ry''z'' = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent au fait que le déterminant $\begin{vmatrix} xy & xz & yz \\ x'y' & x'z' & y'z' \\ x''y'' & x''z'' & y''z'' \end{vmatrix}$ soit nul.

Étape 3. Condition équivalente d'alignement des points et conclusion.

On ramène aussi la condition d'alignement des points P,Q et R à la nullité d'un déterminant. La droite (BC') est d'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x'' & y'' & z'' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = z''X - x''Z = 0,$$

et la droite $(B'C)$ d'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x' & y' & z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = x'Y - y'X = 0.$$

On en déduit les coordonnées barycentriques de P, qui sont égales à $(x'x'', y'x'', x'z'')$ (on doit traiter à part les cas où $x'=0$ et $z''=0$ mais on obtient la même formule, simplifiée). De la même manière on obtient les coordonnées respectives (xy, yy'', yz) et (xz, yz, zz') de Q et R, et le fait que les trois points soient alignés est alors équivalent à la nullité du déterminant

$$\begin{vmatrix} x'x'' & y'x'' & x'z'' \\ xy'' & yy'' & yz'' \\ xz' & zy' & zz' \end{vmatrix}.$$

Or en développant les deux déterminants, on voit qu'ils sont opposés. Donc leur nullité est équivalente, ce qui prouve le théorème de Pascal. □

Application 3 On fixe un triangle (ABC), supposé non plat, et deux points M et N distincts et ailleurs que sur les côtés du triangle. On note M_A le point d'intersection des droites (AM) et (BC), et M_B, M_C, N_A, N_B et N_C les points analogues (voir figure 3.2). Alors ces six points sont sur une même conique.

Démonstration. On définit A' comme étant l'intersection de (M_BN_C) et (N_BM_C), et B' et C' de façon analogue. D'après le théorème de Pascal, montrer le résultat est équivalent à montrer que A', B' et C' sont alignés. On va montrer qu'ils sont sur la droite (MN). On se place dans le repère barycentrique (A, B, C), et on note (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées respectives de M et N. Ainsi, on veut montrer que les points A', B' et C' sont sur la droite d'équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$$

On étudie le cas de A', les autres se traitant de même. Le point M_B est sur les droites (BM) et (AC). Il vérifie donc les équations

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = zX - Zx = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = -Y = 0 \end{cases}$$

Ainsi, si $x = 0$, $X = 0$ et donc $Z \neq 0$, donc les coordonnées de M_B sont $(0, 0, z)$, et si $x = 0$, $Z = X\dfrac{z}{x}$ et donc en prenant $X = x$, les coordonnées de M_B sont $(x, 0, z)$, formule qui est donc valable que x soit nul ou pas. De la même manière, on obtient les jeux de coordonnées suivants :

- M_C : $(x, y, 0)$,
- N_B : $(x', 0, z')$,
- N_C : $(x', y', 0)$.

On veut montrer que A' est sur la droite (MN), c'est-à-dire que les trois droites (M_BN_C), (M_CN_B) et (MN) sont concourantes. Pour cela il faut montrer que le système linéaire formé de leurs trois équations n'est pas de Cramer, à savoir que le déterminant des vecteurs formés par les coefficients des équations est nul. Les trois équations concernées sont

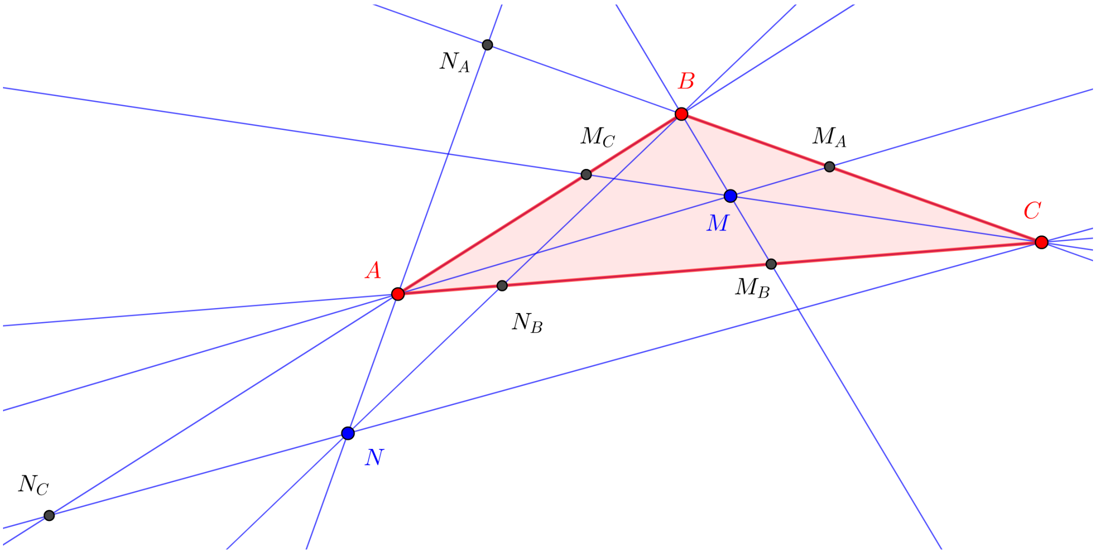
$$\begin{vmatrix} x & 0 & z \\ x' & y' & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x' & 0 & y' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$$

Il faut donc montrer que l'on a

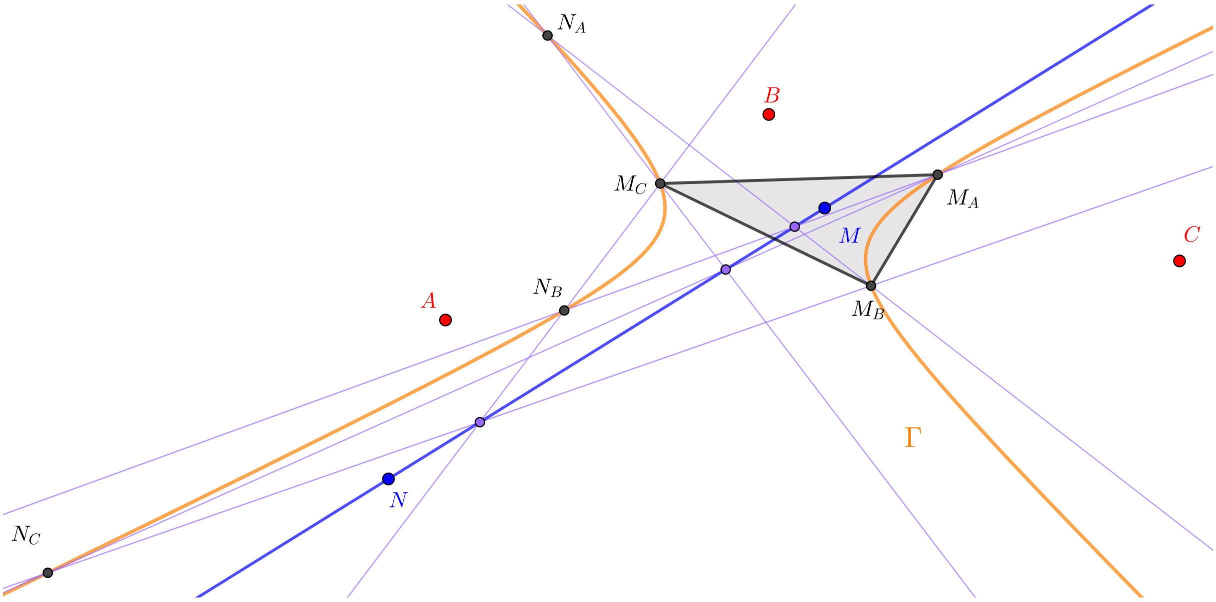
$$\begin{vmatrix} -y'z & x'z & xy' \\ yz' & -xz' & -x'y \\ yz' - y'z & x'z - xz' & xy' - x'y \end{vmatrix} = 0.$$

Or ceci est évident puisque la somme des deux premières lignes est la dernière.

Finalement, A' est sur la droite (MN), et le même raisonnement montre que c'est aussi le cas de B' et C'. Le théorème de Pascal justifie alors l'existence d'une conique Γ sur laquelle on trouve les six points M_A, M_B, M_C, N_A, N_B et N_C. □



(a) Triangle initial



(b) Théorème de Pascal pour les points M_A, M_B, M_C, N_A, N_B et N_C

FIGURE 3.2 – Illustration de l'application 3