17 Théorème de Burnside

Leçons 104, 106, 157

Ref : [Oraux X-ENS Algèbre 2] 3.6, 2.33, 1.10

Ce développement consiste à démontrer le résultat suivant concernant les sous-groupes multiplicatifs de matrices.

Théorème 1 (Burnside) Soit $n \geq 1$ un entier et G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Si G est d'exposant fini $N \geq 1$, i.e.

$$\forall A \in G \quad A^N = I_n,$$

alors G est fini.

Démonstration.

Étape 1. Un lemme sur les matrices nilpotentes.

On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si pour tout entier $k \geq 1$, la trace de A^k est nulle, alors A est nilpotente.

Soit donc A une matrice telle que

$$\forall k \geq 1, \quad \mathrm{Tr}(A^k) = 0.$$

On suppose par l'absurde que A n'est pas nilpotente. Son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, et comme A n'est pas nilpotente, ce polynôme possède des racines non nulles. On note alors $\lambda_1, .., \lambda_r$ les racines non nulles de χ_A, et $n_1, .., n_r$ leur multiplicités (strictement positives) respectives (et n_0, éventuellement nulle, celle de 0). Ainsi, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice T triangulaire supérieure avec une diagonale $(\underbrace{0, .., 0}_{n_0}, \underbrace{\lambda_1, .., \lambda_1}_{n_1}, .., \underbrace{\lambda_r, ..\lambda_r}_{n_r})$ telles que $A = PTP^{-1}$. Ainsi, on a

$$\forall k \geq 1, \quad 0 = \mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(T^k) = \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i^k.$$

On en déduit que le vecteur $\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix}$ est solution (non nulle) du système $VX = 0$ où $X \in \mathbb{C}^r$ est l'inconnue et

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$$

est la donnée. Or puisque les λ_i sont tous non nuls, cette matrice V est inversible[2], ce qui est absurde. Donc A est bien nilpotente.

Étape 2. Introduction d'une injection de G dans un espace vectoriel complexe.

On se donne une base $(M_i)_{1 \leq i \leq m}$ du sous-espace vectoriel $F := \mathrm{vect}(G)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et on définit l'application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ A & \longmapsto & (\mathrm{Tr}(AM_i))_{1 \leq i \leq m} \end{array} \right.$$

On va montrer que f est injective. On se donne donc deux éléments de G, A et B, et on suppose $f(A) = f(B)$. On va commencer par montrer que $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente, en appliquant le lemme. On pose $D := AB^{-1} \in G$. Alors, pour tout $k \geq 1$, puisque G est un groupe, $B^{-1}D^{k-1}$ est un élément de G.

2. En effet, en factorisant le déterminant de V par $\prod_{i=1}^{r} \lambda_i \neq 0$, on obtient un déterminant de Vandermonde. Finalement, puisque les λ_i sont distincts, V est de déterminant $\prod_{i=1}^{r} \lambda_i \prod_{1 \leq i < j \leq r} \lambda_j - \lambda_i$ (formule obtenue par récurrence sur r) non nul, et donc inversible.

De plus, on a $\mathrm{Tr}(D^k) = \mathrm{Tr}(AB^{-1}D^{k-1})$. Mais comme $f(A) = f(B)$, et comme la trace est additive, on a pour tout $M \in G$
$$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM).$$
On en déduit donc
$$\mathrm{Tr}(D^k) = \mathrm{Tr}(BB^{-1}D^{k-1}) = \mathrm{Tr}(D^{k-1}).$$
Donc par récurrence, D^k est de trace n pour tout entier $k \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}((D-I_n)^k) &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} D^i I_n^{k-i}\right) \qquad \text{car } I_n \text{ et } D \text{ commutent} \\
&= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\,\mathrm{Tr}(D^i) \\
&= n\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i} \\
\mathrm{Tr}((D-I_n)^k) &= n(1-1) = 0
\end{aligned}$$

Donc d'après le lemme, $D - I_n = AB^{-1} - I_n$ est nilpotente.

On rappelle maintenant que comme N est l'exposant de G, le polynôme $X^N - 1$ annule tous les éléments de G. Or, comme ce polynôme est scindé à racines simples, tout élément de G est donc diagonalisable. Donc AB^{-1} est diagonalisable, et donc $AB^{-1} - I_n$ aussi [1]. Or cette matrice est nilpotente ; elle est donc nulle. On en déduit que $AB^{-1} = I_n$, c'est-à-dire $A = B$. Donc f est injective.

Étape 3. Plongement de G dans un ensemble fini.

On va conclure en montrant que l'image de f est finie. On note $X := \{\mathrm{Tr}(A),\ A \in G\}$. Comme $X^N - 1$ annule les éléments de G, leur valeurs propres sont des racines N-ièmes de l'unité. Ainsi, X est fini, de cardinal inférieur à Nn. Or comme pour tout $A \in G$, et pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, AM_i est dans G, on en déduit que l'image $f(G)$ est inclue dans X^m, qui est de cardinal inférieur à Nnm. Or f est injective d'après l'étape précédente, donc G est également de cardinal inférieur à Nnm, donc fini. □

1. Car si M et N sont deux matrices diagonalisables qui commutent, leur somme l'est aussi.