16 Table de caractère de $\mathfrak{S}_4$ et tétraèdre

Leçons 105, 107, 161(, 101, 103, 104, 160)

Ref : [H2G2 Tome 1]

On propose ici de déterminer la table de caractère du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ en étudiant son action sur le tétraèdre régulier, puis d'en déduire l'ensemble de ses sous-groupes distingués. On utilisera pour cela le résultat suivant (qui fait également l'objet d'un développement, voir développement 1). Je n'ai pas de référence exacte pour ce développement. La deuxième étape est dans [H2G2 Tome 1] (et est d'ailleurs l'objet du développement 8), la première et la quatrième utilisent les techniques basiques d'études des tables de caractère, et la troisième étape se fait bien quand on visualise correctement le tétraèdre.

Théorème 1 Soit G un groupe fini de cardinal n et de caractères irréductibles $\chi_1, .., \chi_m$. Alors les sous-groupes distingués de G sont exactement les sous-groupes H_I de la forme

$$H_I := \bigcap_{i \in I} \ker(\chi_i),$$

où I désigne une partie quelconque de $[\![1, m]\!]$.

On énonce le résultat principal de ce développement.

Théorème 2 (Table de $\mathfrak{S}_4$) On note Δ le tétraèdre régulier, et $\mathrm{Iso}(\Delta)$ son groupe d'isométries. Alors $\mathrm{Iso}(\Delta)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. On peut alors en déduire la table de caractère de $\mathfrak{S}_4$, qui est la suivante :

$\mathfrak{S}_4$	id 1	(1 2) 6	(1 2 3) 8	(1 2)(3 4) 3	(1 2 3 4) 6
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_2	2	0	-1	2	0
χ_Δ	3	1	0	-1	-1
$\varepsilon\chi_\Delta$	3	-1	0	-1	1

Démonstration. Étape 1. Les deux premières lignes.

On commence par rappeler que les classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_4$ sont les sous-groupes des permutations de même profil. On les dénombre ainsi :

- l'identité
- $\binom{4}{2} = 6$ transpositions
- $2 \times \binom{4}{3} = 8$ 3-cycles
- $\frac{1}{2} \times \binom{4}{2} = 3$ bitranspositions
- 3! 4-cycles

On en déduit que la table possède 5 lignes et 5 colonnes. De plus, les deux premiers caractères sont donnés par le morphisme trivial et le morphisme signature, ce qui donne les deux premières lignes de la table :

$\mathfrak{S}_4$	id 1	(1 2) 6	(1 2 3) 8	(1 2)(3 4) 3	(1 2 3 4) 6
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1

Étape 2. Groupe d'isométries du tétraèdre.

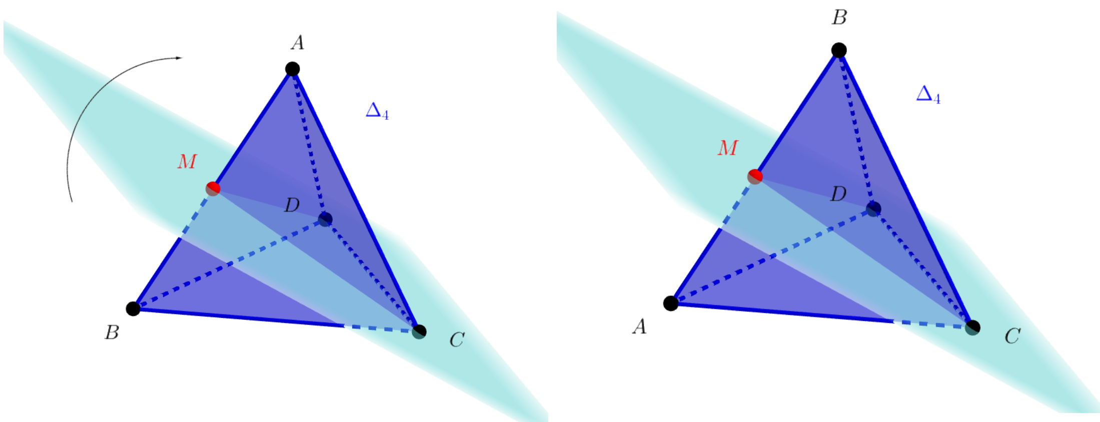
On cherche à connaître le groupe des isométries du tétraèdre, dont on note A, B, C et D les sommets (voir figure 16.1). On définit le morphisme de groupes

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Iso}(\Delta) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_4 \\ f & \longmapsto & f_{|\Delta} \end{array} \right.$$

Ce morphisme est bien défini puisque Δ est par définition stable par les éléments de $\mathrm{Iso}(\Delta)$. On va montrer que φ est bijectif.

- On se donne f tel que $\varphi(f)$ est l'identité. Puisque les vecteurs AB, AC, et AD forment une base de $\mathbb{R}^3$, l'image de f sur cette base caractérise f, et donc f est l'identité sur $\mathbb{R}^3$. Donc φ est injectif.
- On veut maintenant montrer que φ est surjectif. On cherche tout d'abord un antécédent à la permutation $(A\ B)$. On doit trouver une isométrie qui échange A et B sans toucher à C et D. On note alors M le milieu de $[AB]$, et on considère la réflexion de plan (CDM), qui est bien une isométrie, et qui effectue exactement les déplacements recherchés. Donc $(A\ B)$ est dans l'image de φ, et par symétrie de la figure, toutes les transpositions aussi. Or les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_4$, donc tous les éléments de $\mathfrak{S}_4$ sont dans l'image. Donc φ est surjectif.

On en déduit donc que le groupe des isométries du tétraèdre est $\mathfrak{S}_4$.



(a) Tétraèdre régulier Δ et plan (CDM)

(b) Tétraèdre après transformation par la réflexion de plan (CDM)

FIGURE 16.1 – Tétraèdre régulier Δ et isométries

□

Étape 3. Interprétation géométrique des éléments de $\mathfrak{S}_4$ et caractère associé.

On déduit de l'isomorphisme précédent une représentation linéaire du groupe $\mathfrak{S}_4$ de dimension 3 :

$$\rho : \mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{Iso}(\Delta) \hookrightarrow O_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_3(\mathbb{C}).$$

On va calculer son caractère χ_Δ et observer qu'il est irréductible. Pour cela, on doit interpréter géométriquement l'action de chaque profil de permutation sur le tétraèdre.

- Bien sûr, on a $\chi_\Delta(\mathrm{id}) = \dim(\mathbb{C}^3) = 3$.
- On a vu que les transpositions correspondaient à une réflexion, et ont donc la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la bonne base. On a donc $\chi_\Delta((1\ 2)) = 1$.
- Les 3-cycles correspondent à des rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de l'hyperplan parallèle à la base formée par les trois points déplacés. Donc on a

$$\chi_\Delta((1\ 2\ 3)) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0.$$

- Les bitranspositions consistent à échanger deux couples de points. Par exemple, pour la bitransposition (1 2)(3 4), on fixe le milieu M de (AB) et le milieu N de (CD). Alors la rotation d'angle π et d'axe (MN) échange correctement A et B ainsi que C et D. Ainsi, on a

$$\chi_\Delta((1\ 2)(3\ 4)) = 1 + 2\cos(\pi) = -1.$$

- On cherche à étudier l'action du 4-cycle (1 2 3 4). On note O le centre de gravité du tétraèdre, et on se place dans la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ de $\mathbb{R}^3$ pour chercher la matrice de la partie linéaire de la permutation (ou plutôt de l'isométrie affine f associée) et en déduire la trace. On a

$$O + \overrightarrow{OB} = B = f(A) = f(O + \overrightarrow{OA}) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OA}) = O + \vec{f}(\overrightarrow{OA}),$$

où $f(O) = O$ se déduit du fait que f préserve les barycentres (et donc les centres de gravité) en tant qu'application affine. On obtient alors $\vec{f}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB}$. De même, $\vec{f}(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC}$ et $\vec{f}(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OD} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ (puisque O est le centre de gravité). Donc la matrice de f dans cette base s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et on a ainsi

$$\chi_\Delta((1\ 2\ 3\ 4)) = -1.$$

On vérifie que le caractère obtenu est de norme 1 :

$$1\times 9 + 6\times 1 + 9\times 0 + 3\mathbb{1} + 6\times 1 = 24 = |\mathfrak{S}_4|.$$

On peut donc l'ajouter à la table :

$\mathfrak{S}_4$	id 1	(1 2) 6	(1 2 3) 8	(1 2)(3 4) 3	(1 2 3 4) 6
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_Δ	3	1	0	-1	-1

Étape 4. Détermination des deux dernières lignes.

Le produit des caractères signature et du tétraèdre fournissent un nouveau caractère irréductible, que l'on ajoute à la dernière ligne. De plus, on sait que la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles est 24, donc on sait que la dernière est de dimension 2. On peut ensuite compléter les cases manquantes en rappelant que les colonnes sont orthogonales (et la première colonne est complète). On obtient finalement la table complète :

$\mathfrak{S}_4$	id 1	(1 2) 6	(1 2 3) 8	(1 2)(3 4) 3	(1 2 3 4) 6
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_2	2	0	-1	2	0
χ_Δ	3	1	0	-1	-1
$\varepsilon\chi_\Delta$	3	-1	0	-1	1

Corollaire 3 Les sous-groupes propres distingués de $\mathfrak{S}_4$ sont $\mathfrak{A}_4$ et V_4.

Démonstration. On étudie la table obtenue sous le prisme du théorème 1. On a

- $\ker(\mathbb{1}) = \mathfrak{S}_4$
- $\ker(\varepsilon) = \mathfrak{A}_4$
- $\ker(\chi_2) = V_4$
- $\ker(\chi_\Delta) = \ker(\varepsilon\chi_\Delta) = \{\mathrm{id}\}$

Comme ces groupes sont inclus les uns dans les autres, cette liste fournit tous les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$. □