8 Théorème de Kalman

Leçons 221(, 151)

Ref : [Trélat] II.1 Th 2.2

Ce développement s'intéresse à la contrôlabilité d'une équation différentielle linéaire. On considère l'équation

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

où

- $x \in C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$ est l'inconnue
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ sont des données fixées
- $u \in C^0([0,T],\mathbb{R}^m)$ est une donnée variable appelée *contrôle* du système.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme que le problème

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

associé à toute donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, admet une unique solution x.

Définition 1 On dit que l'équation (1) est *contrôlable en temps T* si pour tout couple (x_0, x_f) d'éléments de $\mathbb{R}^n$, il existe un contrôle $u \in C^0([0,T],\mathbb{R}^m)$ tel que la solution du problème (2) associé vérifie $x(T) = x_f$.

Théorème 2 (Kalman) Le système (1) est contrôlable en temps T si et seulement si la *matrice de Kalman K* qui lui est associée, définie par

$$K = \begin{pmatrix} B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,mn}(\mathbb{R}),$$

est de rang n.

Remarque. On remarque que la CNS ne dépend pas du temps T, donc le système est soit contrôlable en tout temps, soit jamais contrôlable.

Démonstration. La démonstration est basée sur le lemme suivant, qui établit une caractérisation du fait que la matrice de Kalman est de rang maximal.

Lemme 3 K est de rang n si et seulement si l'application

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} C^0([0,T],\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ u & \longmapsto & \displaystyle\int_0^T \mathrm{e}^{(T-t)A}\, Bu(t)\; dt \end{array} \right.$$

est surjective.

Étape 1. Sens réciproque du lemme par contraposée.

On suppose que K est de rang strictement inférieur à n, c'est-à-dire que K n'est pas surjective, et donc que l'orthogonal de son image contient un élément $v \in \mathbb{R}^n$ non nul. On a donc

$$\forall y \in \mathbb{R}^{mn}, \quad \langle v, Ky\rangle =^t vKy = 0.$$

Ainsi, l'application ${}^t vK$, qui est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{mn}$, est nulle. En développant le produit matriciel, on a donc

$$K = \begin{pmatrix} {}^t vB \mid {}^t vAB \mid \cdots \mid {}^t vA^{n-1}B \end{pmatrix} = 0.$$

On en déduit que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, ${}^t vA^kB$ est la matrice nulle. Or le théorème de Cayley-Hamilton fournit une écriture de A^n comme combinaison linéaire des A^k, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donc on a également ${}^t vA^nB = 0$, et par récurrence c'est donc vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a pour tout réel $t \geq 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{N} {}^t v \frac{t^k A^k}{k!} B = 0.$$

Ainsi, en factorisant par ${}^t v$, et en passant à la limite quand N tend vers l'infini, par continuité du produit matriciel, on obtient
$$ {}^t v \, e^{tA} \, B = 0. $$
Ainsi, en se donnant un contrôle $u \in C^0([0,T], \mathbb{R}^m)$ et un réel $t \in [0,T]$, on a ${}^t v \, e^{(T-t)A} \, Bu(t) = 0$, ce qui s'intègre en
$$ \langle v, \Phi(u) \rangle = {}^t v \Phi(u) = 0. $$
On en déduit que v est un élément non nul de l'orthogonal de l'image de Φ, et donc que Φ n'est pas surjective.

Étape 2. Sens direct du lemme par contraposée.

On suppose cette fois que Φ n'est pas surjective, et donc on se donne un élément $w \in \mathbb{R}^n$ non nul dans l'orthogonal de son image :
$$ \forall u \in C^0([0,T], \mathbb{R}^m), \quad {}^t w \Phi(u) = \int_0^T {}^t w \, e^{(T-t)A} \, Bu(t) \; dt = 0. $$
On choisit
$$ u : \left| \begin{array}{ccc} [0,T] & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ t & \longmapsto & {}^t\big({}^t w \, e^{(T-t)A} \, B\big) \end{array} \right. , $$
qui est un élément de $C^0([0,T], \mathbb{R}^m)$, et on obtient alors
$$ 0 = \int_0^T {}^t w \, e^{(T-t)A} \, Bu(t) \; dt = \int_0^T \|u(t)\|^2 \, dt. $$
Ainsi, on en déduit
$$ \forall t \in [0,T], \quad {}^t w \, e^{(T-t)A} \, B = 0. $$
En particulier, en spécialisant en $t = T$, on obtient ${}^t wB = 0$. De plus, les deux membres de cette expression sont en fait de classe C^∞. En la dérivant k fois, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient ${}^t wA^k B = 0$. On en déduit donc que la matrice wK est nulle. Ainsi, on a
$$ \forall y \in \mathbb{R}^{mn}, \quad \langle w, Ky \rangle = {}^t wKy = 0, $$
et donc w est un vecteur non nul de l'orthogonal de l'image de K. Donc K n'est pas surjective, et donc elle est de rang strictement inférieur à n.

Étape 3. Équivalence entre contrôlabilité et surjectivité de Φ.

Il reste à montrer que le système (1) est contrôlable si et seulement si l'application Φ est surjective. C'est une application directe de la formule de Duhamel : ici la résolvante s'écrit $R(t,s) = e^{(t-s)A}$, et donc si x vérifie (2), on a
$$ x(T) = e^{TA} \, x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} \, Bu(t) \; dt = e^{TA} \, x_0 + \Phi(u). $$
Donc le système est contrôlable en temps T si et seulement si $x_f - e^{TA} \, x_0$ admet un antécédent par Φ pour tout $(x_0, x_f) \in (\mathbb{R}^n)^2$, ce qui est équivalent à la surjectivité de Φ. $\square$

Remarque.

– Plusieurs contrôles peuvent bien sûr permettre de passer de x_0 à x_f en temps T, puisque le noyau de Φ est de dimension infinie.
– On peut demander que les contrôles soient mieux que continus : il suffit de pouvoir prendre le u définit à l'étape 2 comme contrôle, donc comme celui-ci est de classe C^∞, la preuve fonctionne toujours en demandant que les contrôles soient de classe C^∞.

Exemple. On considère les deux systèmes d'équations suivants
$$ \left\{ \begin{array}{l} x' = x + u \\ y' = x \end{array} \right. \qquad\qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + u \\ y' = y \end{array} \right. $$
On voit que le système de gauche (resp. droite) est sous la forme (1) avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (resp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, dans le premier cas, la matrice de Kalman est $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de rang 2, donc le système

est contrôlable, alors que dans le second cas, elle est égale à $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de rang 1, et donc le système n'est pas contrôlable. Ce résultat rejoint l'intuition, puisque l'on se dit que dans le premier cas, puisque y "dépend de x", on peut contrôler x et y en faisant varier u, alors que dans le second, y est indépendant de x et donc le contrôle de u n'intervient pas sur y.