5 Lemme de Morse

Leçons 158, 171, 214, 215

Ref : [Rouvière] Exo 114

On commence par donner une forme analytique de la réduction des formes quadratiques.

Lemme 1 (Réduction des formes quadratiques) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A dans $GL_n(\mathbb{R})$ et une application $\rho : V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que pour tout $M \in V$, on a

$$M = {}^t\rho(M)A\rho(M).$$

Remarque 2 En d'autres terme, M se ramène par changement de base C^1 à A. En particulier, toute matrice assez proche de A a la même signature que A.

Démonstration. L'application $\gamma : M \longmapsto {}^tMAM$ est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculons sa différentielle en l'identité. On a pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\gamma(I_n + H) - \gamma(I_n) = {}^tHA + AH + \underbrace{{}^tHAH}_{O(\|H\|^2)},$$

et donc comme A est symétrique

$$d\gamma_{I_n}(H) = {}^t(AH) + AH.$$

Le noyau de cette forme linéaire est formé des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AM est antisymétrique. Elle est de plus surjective, car si $H = \dfrac{1}{2}A^{-1}M$, on a $d\gamma_{I_n}(H) = M$.

On considère maintenant le sous-espace F des matrices telles que AM soit symétrique. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe de $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$, F est un supplémentaire de $\ker(d\gamma_{I_n})$. De plus, $I_n \in F$. On note $\psi = \gamma_{|F}$, de sorte que la différentielle $d\psi_{I_n}$ est bijective. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage U de l'identité dans F tel que ψ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $V = \psi(U)$. Quitte à restreindre U et V, on suppose que U est inclus dans l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, V est un voisinage ouvert de $\psi(I_n) = A = \gamma(I_n)$, et pour toute matrice M de V, on a

$$M = {}^t\rho(M)A\rho(M),$$

où $\rho = \psi^{-1}$ est de classe C^1. □

On se donne maintenant un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine, et une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3. On suppose que 0 est un point critique quadratique non dégénéré de f, c'est-à-dire que df_0 est la forme linéaire nulle et d^2f_0 est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$, dont on note $(p, n-p)$ la signature.

Théorème 3 (Lemme de Morse) Il existe un C^1-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\varphi(0) = 0$ si et seulement si

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \cdots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \varphi_n(x)^2.$$

Démonstration. On écrit la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 en 0 pour f :

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 (1-t)\, d^2f_{tx}(x, x)\; dt. \tag{1}$$

On note alors $\mathcal{H}f(tx)$ la matrice hessienne de f en tx, et on définit la matrice symétrique

$$Q(x) := \int_0^1 (1-t)\mathcal{H}f(tx)\; dt,$$

de sorte que (1) se réécrit

$$f(x) - f(0) = {}^txQ(x)x.$$

Comme f est de classe C^3, Q est de classe C^1 sur U. Comme $Q(0) = \frac{1}{2}\mathcal{H}f(0)$ est symétrique et inversible (puisque d^2f_0 est non dégénérée), on peut appliquer le lemme de réduction des formes quadratiques : il existe un voisinage V de $Q(0)$ et un changement de variable $\rho : V \longrightarrow \rho(V)$ tels que, pour $M \in V$, on a

$$M = {}^t\rho(M)Q(0)\rho(M).$$

Or Q est de classe C^1, donc au voisinage de 0, $Q(x) \in V$. On peut donc définir l'application $P = \rho \circ Q$ de classe C^1 au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$, de manière à avoir

$$Q(x) = {}^tP(x)Q(0)P(x).$$

Ainsi, en posant $y = P(x)x$, on a sur ce voisinage de 0

$$f(x) - f(0) = {}^tyQ(0)y.$$

Or $Q(0)$ est de signature $(p, n-p)$, donc il existe un changement de variable linéaire A tel que

$${}^tAQ(0)A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose alors $\varphi(x) = A^{-1}y = A^{-1}P(x)x$, qui est bien une fonction de classe C^1 telle que $\varphi(0) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= {}^tyQ(0)y \\ &= {}^t\varphi(x) \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \varphi(x) \\ f(x) - f(0) &= \varphi_1(x)^2 + \cdots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \varphi_n(x)^2. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\varphi(h) = A^{-1}P(h)h = A^{-1}P(0)h + o(\|h\|),$$

donc la différentielle de φ en 0 est $A^{-1}P(0)$ qui est inversible. D'après le théorème d'inversion locale, φ est donc un C^1-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$. $\square$

Comme toujours, il est important d'avoir en tête des applications de ce développement. Dans [Rouvière], quelques exercices donnent des interprétations du lemme de Morse en terme de position relative d'une surface et de ses plans tangents (l'exercice 111 par exemple). Je présente ici un autre résultat, démontré avec la preuve du lemme de Morse dans [Bernis & Bernis]. On considère toujours la même fonction f, dont la hessienne en 0 est supposée définie positive (donc de signature $(n, 0)$). On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = -\nabla f(X) \end{cases}$$

où X est à valeurs dans U et Y dans $\mathbb{R}^n$. On peut alors montrer en utilisant le changement de variable donné par le lemme de Morse pour montrer que 0 est un équilibre stable non asymptotiquement stable de ce système.