3 Ellispsoïde de John Löwner

Leçons 152, 158, 171, 219, 229, 253(, 150, 160, 191, 203, 215)

Ref : [Oraux X-ENS Algèbre 3] 3.37

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle. On note respectivement $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^+$ et $\mathcal{Q}^{++}$ les ensembles des formes quadratiques, quadratiques semi-définies positives, et quadratiques définies postives sur $\mathbb{R}^n$. On note B_q, pour $q \in \mathcal{Q}^{++}$, la boule unité fermée de q :

$$B_q := \{x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \leq 1\}.$$

Théorème 1 Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe une unique ellipsoïde de volume minimal, centrée en 0, contenant K.

Démonstration.

Comme les ellipsoïdes sont exactement les boules unité des formes quadratiques définies positives, ce problème revient à trouver un élément q de $\mathcal{Q}^{++}$ tel que B_q soit de volume minimal parmi les boules unités des éléments de $\mathcal{Q}^{++}$ contenant K.

Étape 1. Volume de la boule unité et reformulation.

Soit $q \in \mathcal{Q}^{++}$. On calcule pour commencer le volume de B_q, que l'on note V_q. On se donne une base orthonormée $(e_1, .., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avec $a_1, .., a_n$ strictement positifs. On note $D(q) = a_1..a_n$ le déterminant de q dans n'importe quelle base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. On a alors

$$\begin{aligned}
V_q &= \int_{B_q} dx_1..dx_n \\
&= \int_{a_1x_1^2+..+a_nx_n^2 \leq 1} dx_1..dx_n \\
&= \int_{t_1^2+..+t_n^2} \frac{dt_1..dt_n}{\sqrt{D(q)}} \qquad \text{par changement de variable } x_i = \frac{t_i}{\sqrt{a_i}} \\
V_q &= \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}
\end{aligned}$$

où V_0 désigne le volume de la boule unité pour la norme euclidienne. Ainsi, montrer le théorème revient à montrer qu'il existe une forme quadratique $q \in \mathcal{Q}^{++}$ qui maximise le déterminant parmi celles dont la boule unité contient K.

Étape 2. Restriction à un convexe compact non vide.

On munit $\mathcal{Q}$ de la norme N définie par

$$\forall q \in \mathcal{Q} \quad N(q) := \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|.$$

On pose alors $\mathcal{A} = \{q \in \mathcal{Q}^+,\ \forall x \in K\ q(x) \leq 1\}$. On va chercher à maximiser le déterminant sur ce domaine.

- $\mathcal{A}$ est convexe car si q et q' sont dans $\mathcal{A}$, et $\lambda \in [0,1]$, $\lambda q + (1-\lambda)q'$ est semi-définie positive, et on a pour $x \in K$
$$\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \leq \lambda + 1 - \lambda = 1.$$
- Soit $(q_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ convergeant vers $q \in \mathcal{Q}$. Alors pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a
$$|q_n(x) - q(x)| \leq N(q_n - q)\,\|x\|^2.$$
On en déduit que $q_n(x)$ converge vers $q(x)$. Mais comme q_n est définie, cette suite est positive, donc $q(x)$ est positive, ce qui signifie que q est semi-définie positive. De plus, si x est dans K, la suite $(q_n(x))_{n \geq 0}$ est aussi majorée par 1, donc la limite aussi. Cela signifie que $q \in \mathcal{A}$. Ainsi, $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathcal{Q}$.

– Comme K est d'intérieur non vide [1], on peut se donner $a \in K$ et $r > 0$ tels que la boule $B(a, r)$ soit incluse dans K. Soit $q \in \mathcal{A}$. Si $\|x\| \leq r$, alors $q(a + x) \leq 1$ car $a + x \in B(a, r)$. De plus, $q(a) = q(-a) \leq 1$. On a alors

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x + a - a)} \leq \sqrt{q(a + x)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2$$

par inégalité de Minkowski. Ainsi, $q(x) \leq 4$. On en déduit que si $\|x\| \leq 1$, on a

$$|q(x)| = q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leq \frac{4}{r^2}.$$

Donc $N(q) \leq \dfrac{4}{r^2}$ et $\mathcal{A}$ est bornée.

– Comme K est compact, il est inclus dans la boule fermée $B(0, M)$, pour un certain $M > 0$, et donc si $q(x) = \dfrac{\|x\|^2}{M^2}$, q est dans $\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est non vide.

On a donc montré que $\mathcal{A}$ est un convexe compact non vide de $\mathcal{Q}$ [2].

Étape 3. Stricte convexité logarithmique du déterminant.

Lemme 2 Soit $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in (0, 1)$. Alors on a

$$\det(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \det(A)^\lambda \det(B)^{1-\lambda},$$

avec égalité si et seulement si $A = B$.

Démonstration. Comme $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème de pseudo-réduction simultanée : il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A =^t PP$ et une famille de réels $(d_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que $B =^t PDP$, où $D = \mathrm{diag}(d_i)$. Comme $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ les d_i sont tous positifs strictement [3]. On a alors pour $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{cases} \det(A)^\lambda \det(B)^{1-\lambda} = \det(P)^{2\lambda} \det(P)^{2(1-\lambda)} \det(D)^{1-\lambda} = \det(P)^2 \det(D)^{1-\lambda} \\ \det(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \det(P)^2 \det(\lambda I + (1 - \lambda)D) \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{array}{cc} & \det(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \det(A)^\lambda \det(B)^{1-\lambda} \\ \iff & \det(\lambda I + (1 - \lambda)D) \geq \det(D)^{1-\lambda} \\ \iff & \displaystyle\prod_{i=1}^n \lambda + (1 - \lambda)d_i \geq \left(\prod_{i=1}^n d_i\right)^{1-\lambda} \\ \iff & \displaystyle\sum_{i=1}^n \ln(\lambda + (1 - \lambda)d_i) \geq (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \ln(d_i) \end{array}$$

Or la dernière ligne est vraie par concavité du logarithme. De plus, l'inégalité est stricte si et seulement si l'un des d_i est différent de 1 (par stricte concavité du logarithme), ce qui est équivalent à dire que $A \neq B$. □

Étape 4. Maximisation du déterminant sur $\mathcal{A}$.

Comme l'application déterminant est continue, l'application

$$D : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ q & \longmapsto & D(q) \end{array} \right.$$

est continue sur le compact non vide $\mathcal{A}$. Elle admet donc un maximum, en un point $q_0 \in \mathcal{A}$. De plus, $\mathcal{A}$ contient comme on l'a vu la forme $\dfrac{\|\cdot\|^2}{M^2}$, qui est définie positive. Donc $D(q_0)$ est strictement positif, et $q_0 \in \mathcal{Q}^{++}$. Il existe donc un ellipsoïde de volume minimal contenant K. Montrons qu'il est unique.

1. C'est le seul endroit où l'on a besoin de cette hypothèse.
2. $\mathcal{Q}$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc ses compacts sont les fermés bornés.
3. Tout d'abord, ne pas confondre les d_i avec les valeurs propres de B, P n'est pas orthogonale. Le résultat se montre en fixant par l'absurde un d_i négatif. On se donne $X = P^{-1}e_i$. On a alors

$$^tXBX =^t e_i D e_i = d_i \leq 0,$$

ce qui est absurde puisque B est définie positive.

On se donne $q \in \mathcal{A}$ un autre maximum de D, on suppose par l'absurde que $q \neq q_0$. On note S_q et S_{q_0} les matrices respectives de q et q_0 dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui sont donc symétriques définies positives). Par stricte concavité logarithmique du déterminant, on a

$$D\left(\frac{q+q_0}{2}\right) = \det\left(\frac{S_q+S_{q_0}}{2}\right) > \sqrt{\det(S_q)\det(S_{q_0})} = \sqrt{D(q_0)^2} = D(q_0),$$

ce qui contredit la maximalité de $D(q_0)$. Donc l'ellipsoïde obtenue est bien unique. □

On peut privilégier l'étape 1 ou l'étape 3 suivant la leçon : la marche à suivre est globalement de démontrer l'étape 1 dans les leçons d'algèbre et l'étape 3 dans les leçons d'analyse. Si celui-ci ne figure pas dans le plan, il peut être bon de préciser que l'on admet le théorème de pseudo-réduction simultanée pour la démonstration de l'étape 3.