1 Constante de connectivité du réseau hexagonal

Leçons 190, 223, 230, 243(, 241)

Ref :

Ce développement s'inspire du travail que j'ai effectué pendant mon stage de Master 1, je n'ai donc pas de référence disponible le jour de l'Agrégation pour les étapes 1, 2 et 5. En revanche, le théorème de Cauchy-Hadamard est démontré dans [El Amrani], et le lemme de Fekete dans [Oraux X-ENS Analyse 1].

On se donne un entier $d \geq 1$, et on se place sur le réseau $\mathbb{Z}^d$ de $\mathbb{R}^d$.

Définition 1 On appelle *sommet* tout élément du réseau $\mathbb{Z}^d$, et *arête* tout segment reliant deux sommets.

Définition 2 On appelle *chemin* ω de taille $n \geq 0$, ou *n-chemin*, les positions successives notées $(\omega_0, .., \omega_n)$ d'une marche aléatoire sur un réseau, partant de l'origine de $\mathbb{R}^d$. Si de plus la marche passe au plus une fois par chaque sommet, on dit que la marche et le chemin sont *auto-évitants*. On appelle aussi *taille* de ω le nombre $\ell(\omega) = n$ d'étapes effectuées.

On note c_n le nombre de chemins auto-évitants de taille n sur le réseau hexagonal. On énonce le théorème qui donne la vitesse de croissance exponentielle de cette suite, dont on ne donne pas la preuve complète, qui prendrait bien trop de temps.

Théorème 3 La constante de connectivité du réseau hexagonal est $\mu = x_c^{-1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, où x_c est le rayon de convergence de la série génératrice $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$.

Démonstration.

Étape 1. Comportement asymptotique des chemins auto-évitants.

On montre va d'abord montrer que le nombre de chemins auto-évitants de taille n croit exponentiellement vite, et on a même pour tout $n \geq 0$

$$\sqrt{2}^n \leq c_n \leq 3 \cdot 2^{n-1}.$$

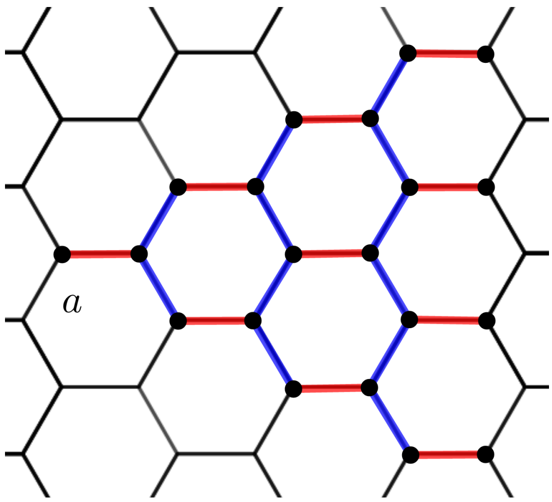
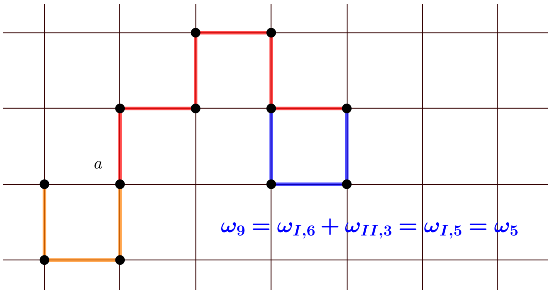


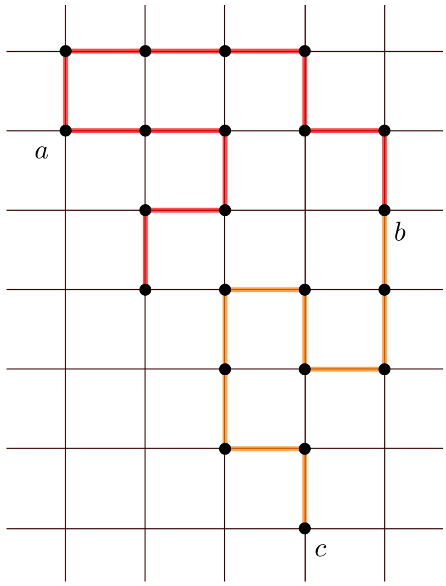
FIGURE 1.1 – Une borne inférieure du nombre de n-chemins auto-évitants

– On construit un premier chemin auto-évitant, comme sur la figure 1.1, en suivant toujours l'arête qui va de gauche à droite sans changer l'ordonnée (en rouge), quand celle-ci est disponible, c'est-à-dire une étape sur deux ; et quand elle ne l'est pas, on prend au hasard l'une des deux possibilités restantes (en bleu) : ainsi, on a un choix à faire entre deux possibilités toutes les deux étapes. Donc, en tout, il y a $2^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ possibilités. On en déduit que l'on a bien

$$c_n \geq \sqrt{2}^n.$$



(a) Concaténation de deux chemins auto-évitants



(b) Troncature d'un chemin auto-évitant

FIGURE 1.2 – Concaténation, troncature de chemins auto-évitants et nature des chemins créés

– Pour le premier pas, on a toujours trois possibilités, qui sont les trois sommets adjacents à l'origine ; ensuite, on a au plus deux possibilités, puisque pour qu'un chemin soit auto-évitant, il ne doit pas revenir sur ses pas, donc au plus deux des trois sommets adjacents (ceux dont on ne vient pas) sont disponibles. Cela montre que l'on a
$$c_n \leq 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Donc si elle existe, la constante de connectivité est comprise entre $\sqrt{2}$ et 2.

Étape 2. Sous-mutliplicativité du nombre de chemins auto-évitants.

On va montrer que la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ est sous-multiplicative :

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad c_{n+m} \leq c_n c_m. \tag{1}$$

Soient n et m deux entiers. On se donne un chemin ω de Ω_{n+m}, et on le coupe au n-ième sommet : on définit alors deux chemins $\omega_I \in \Gamma_n$ et $\omega_{II} \in \Gamma_m$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![0, n]\!] & \omega_{I,i} = \omega_i \\ \forall i \in [\![0, m]\!] & \omega_{II,i} = \omega_{n+i} - \omega_n \end{cases}$$

de sorte que $\omega = \omega_I \circ \omega_{II}$. Si la concaténation de deux chemins auto-évitants n'est pas forcément un chemin auto-évitant, la réciproque est vraie : en coupant comme on vient de le faire un chemin auto-évitant, on obtient deux chemins auto-évitants. On le voit sur la figure 1.2b, où l'on a coupé le chemin qui va de a à c au point b, créant ainsi deux chemins auto-évitants, celui en rouge, et celui en orange. Cela se démontre formellement : si pour deux entiers i et j, on a $\omega_{I,i} = \omega_{I,j}$, alors $\omega_i = \omega_j$, ce qui contredit le fait que ω est auto-évitant, donc ω_I l'est nécessairement ; et le même raisonnement par l'absurde montre que ω_{II} est lui aussi auto-évitant. On en déduit l'inégalité ensembliste suivante :

$$\Omega_{n+m} \subset \Omega_n \times \Omega_m.$$

En passant au cardinal de ces ensembles finis, on déduit l'inégalité (1).

Étape 3. Lemme de Fekete.

Lemme 4 (Fekete) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels sous-additive au sens classique, i.e. vérifiant

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad a_{n+m} \leq a_n + a_m.$$

Alors la limite de la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ existe dans $[-\infty, +\infty)$, et elle est égale à la borne inférieure de la suite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}. \tag{2}$$

On effectue une preuve de ce lemme en deux temps. On commence par fixer $k \in \mathbb{N}$, et on va montrer

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_k}{k}, \tag{3}$$

où $\overline{\lim}$ désigne la limite supérieure. On note $A_k = \max_{1\leq r\leq k} a_r$, et on se donne les deux entiers $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![1,k]\!]$ (uniquement déterminés par division euclidienne) tels que $n = qk + r$. On a alors par sous-additivité

$$a_n \leq qa_k + a_r \leq \frac{n}{k}a_k + A_k.$$

On divise alors par n des deux côtés de l'inégalité, et on passe à la limite supérieure. Le terme $\frac{A_k}{n}$ étant borné au numérateur (puisque k est fixé), il disparaît à la limite en n, ce qui montre effectivement l'inégalité (3).

On passe ensuite à la limite inférieure en k dans (3), ce qui permet de montrer que les deux limites, supérieures et inférieures, sont égales. Ainsi, la limite existe, et en passant à la borne inférieure en k dans (3), on montre qu'elle vaut bien $\inf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$. De plus, cela montre que la limite ne peut valoir $+\infty$.

Étape 4. Règle de Cauchy et théorème de Cauchy-Hadamard.

On se donne une suite de réels positifs $(u_n)_{n\geq 0}$ et on considère

$$L = \overline{\lim}(u_n)^{\frac{1}{n}},$$

qui est réel ou égal à $+\infty$.

- Supposons $L < 1$. On se donne $a \in (L, 1)$. Il existe donc un nombre fini d'entiers n tels que $u_n^{\frac{1}{n}} > a$. Donc pour $n \geq N$, où N est plus grand que tous ces entiers, on a $u_n \leq a^n$. Or la série $\sum a_n$ converge, donc $\sum u_n$ aussi.
- À l'inverse, si $L > 1$, il existe une infinité d'entiers n tels que $u_n > 1$ (car $u_n^{\frac{1}{n}} > 1$). La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne tend donc pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

On applique cela aux séries entières : le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est $R = \left(\overline{\lim}\, a_n^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$.

Étape 5. Constante de connectivité et lien avec la fonction génératrice.

On va finalement démontrer l'existence de la constante de connectivité de la suite $(c_n)_{n\geq 0}$, définie par

$$\mu := \lim_{n\to\infty} c_n^{\frac{1}{n}}. \tag{4}$$

On considère la suite $(\ln(c_n))_{n\geq 1}$, qui est, d'après l'étape 2, sous-additive. D'après le lemme de Fekete, la suite $\left(\frac{\ln(c_n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge donc vers sa borne inférieure, que l'on note $\widetilde{\mu}$. De plus, on a pour tout $n \geq 1$ toujours au moins un élément dans Ω_n, ce qui montre que $c_n \geq 1$ et donc que la suite $\left(\frac{\ln(c_n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ est à valeurs positives. Ainsi, sa limite est positive. Le fait qu'elle soit finie est une autre conséquence du lemme. On pose alors $\mu = e^{\widetilde{\mu}} \geq 1$, et par composition des limites, on a bien

$$c_n^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu \tag{5}$$

De plus, on déduit de l'étape 4 que l'étude de la série génératrice $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ fournit la valeur de cette constante, à partir de celle de x_c. □

La fin de la démonstration consiste à utiliser différentes caractéristiques des chemins auto-évitants et du réseau hexagonal pour déterminer la valeur de ce rayon de convergence. L'intérêt est ici d'utiliser des techniques d'analyse pour faire de la combinatoire et compter des objets, comme justement les chemins auto-évitants.

Remarque.

- Au vu de la preuve du lemme de Fekete, rien de permet d'affirmer que la limite ne peut pas être $-\infty$. D'ailleurs, c'est possible ! Cela se voit en prenant $a_n = -n^2$, qui donne bien une suite sous-additive, mais la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ est la suite $(-n)_{n\geq 1}$, qui diverge vers $-\infty$.