

ENS RENNES - UNIVERSITÉ DE RENNES I  
PRÉPARATION À L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES  
MÉMOIRE DE MASTER 2

Leçon n°160  
Endomorphismes remarquables d'un espace  
vectoriel euclidien (de dimension finie)

Brieuc FRÉNAIS

Jury : Lionel FOURQUAUX



10 décembre 2019

# Table des matières

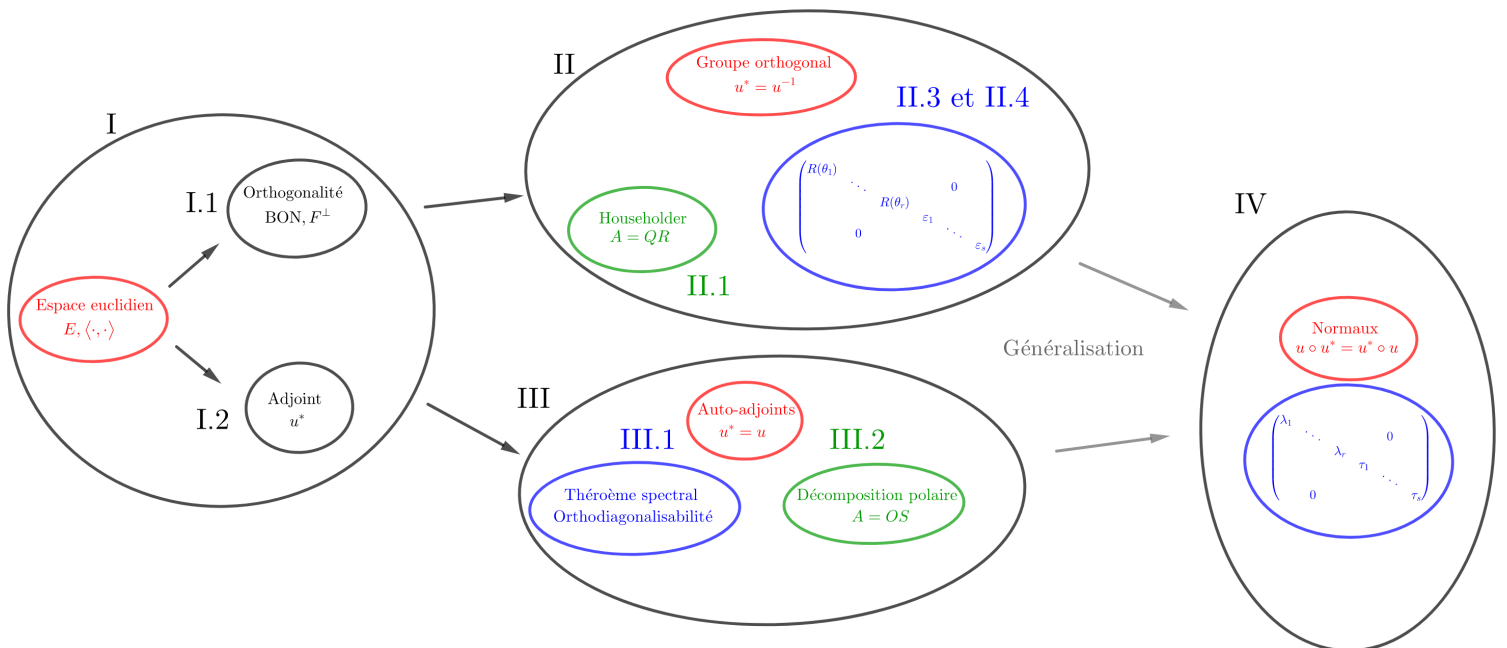
<b>Plan détaillé pour la leçon 160</b>	<b>3</b>
I Structure euclidienne sur un espace vectoriel . . . . .	3
1 Produit scalaire et base orthonormée . . . . .	3
2 Adjoint d'un endomorphisme . . . . .	4
II Étude des endomorphismes orthogonaux . . . . .	4
1 Groupe orthogonal . . . . .	5
2 Quelques remarques topologiques et algébriques . . . . .	5
3 Étude de $O_2(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$ . . . . .	7
4 Réduction des endomorphismes orthogonaux . . . . .	8
III Étude des endomorphismes auto-adjoints . . . . .	10
1 Réduction des endomorphismes auto-adjoints . . . . .	10
2 Décomposition polaire . . . . .	10
IV Étude des endomorphismes normaux . . . . .	11
<b>Développements</b>	<b>13</b>
I Quaternions et groupe spécial orthogonal . . . . .	13
II Décomposition polaire et applications . . . . .	15
<b>Oral blanc en classe</b>	<b>18</b>
<b>Index des notations</b>	<b>20</b>
<b>Références</b>	<b>21</b>

# Introduction

Ajouter à un espace vectoriel de dimension finie une **structure euclidienne** permet d'obtenir un grand nombre de nouvelles propriétés sur cet espace et surtout sur ses **endomorphismes**, auxquels on porte un grand intérêt puisque c'est eux qui agissent sur l'espace. C'est pourquoi il est important, en tant que futur enseignant ou chercheur, d'étudier les résultats que la structure euclidienne apporte sur l'étude des endomorphismes en dimension finie.

Ce mémoire présente dans un premier temps les notions d'**orthogonalité** et d'**endomorphisme adjoint** qui découlent du produit scalaire, puis il donne un panorama des résultats les plus importants qui se déduisent de ces outils. Les transformations remarquables qui sont étudiées permettent notamment d'obtenir deux types de théorèmes, des théorèmes de **décomposition** et des théorèmes de **réduction** : démontrer que l'on peut décomposer les endomorphismes généraux d'un espace euclidien en "briques élémentaires" que sont les différents types d'endomorphismes normaux, puis donner les formes typiques que prennent ces endomorphismes remarquables, permet ainsi de décrire les transformations qui s'appliquent à l'espace dans leur globalité.

La place donnée dans ce mémoire aux endomorphismes inversibles, trigonalisables, diagonalisables et autres, que l'on peut légitimement qualifier de "remarquables", est limitée, de par le fait que je me concentrerai sur les endomorphismes dont les spécificités découlent directement de la structure euclidienne ajoutée à l'espace vectoriel. Je donnerai également çà et là des idées de preuves de résultats qui me semblent importants, en plus de la démonstration des deux développements que j'ai choisi de présenter pour cette leçon.



# Plan détaillé pour la leçon 160

**Cadre :** On se place dans un **espace euclidien**  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , c'est-à-dire que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur  $E$ . On note  $L(E)$  l'espace des endomorphismes sur  $E$ .

## I Structure euclidienne sur un espace vectoriel

On commence par rappeler les premiers objets et propriétés qui apparaissent quand on ajoute la structure euclidienne sur un espace vectoriel de dimension finie.

### 1 Produit scalaire et base orthonormée

**Définition 1** Si  $A$  est une partie de  $E$ , on appelle *orthogonal* de  $A$  le sous-espace vectoriel de  $E$  donné par

$$A^\perp := \{x \in E \mid \forall a \in A \langle a, x \rangle = 0\}.$$

**Exemple 2**  $E^\perp = \{0\}$  et  $\{0\}^\perp = E$ .

**Proposition 3** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On a

- (i)  $E = F \oplus F^\perp$ .
- (ii)  $F^{\perp\perp} = F$ .

**Définition 4** Une *base orthogonale*  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  est une base formée de vecteurs orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

Si de plus les  $e_i$  sont de norme 1, on dit que la base est *orthonormée*.

Les deux résultats qui suivent sont les plus importants de cette section : il est toujours agréable de travailler avec des bases orthonormées, puisque celles-ci permettent de **projeter** "facilement" (par rapport à une situation où l'on n'a pas de structure euclidienne).

**Théorème 5** Tout espace euclidien  $E$  admet une base orthonormée. En particulier,  $E$  s'identifie à  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Théorème 6 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)** On peut construire une base orthonormée de  $E$  à partir de toute base de  $E$ .

**Exemple 7** On munit l'espace  $\mathbb{R}_2[X]$  des polynômes de degré inférieur à 2 du produit scalaire défini par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X] \quad \langle P, Q \rangle := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} P(x)Q(x) dx.$$

Alors l'orthonormalisée de la base canonique  $(1, X, X^2)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  est  $\left(1, X, \frac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - 1)\right)$ .

**Définition 8** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On appelle *projecteur orthogonal* sur  $F$  (noté  $p_F$ ) la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ , et *symétrie orthogonale* par rapport à  $F$  la symétrie associée, que l'on note  $s_F$ . Si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base orthonormée de  $F$ , on a

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

**Proposition 9** Avec les notations de la définition, on a

$$\forall x \in E \quad d(x, F) := \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|.$$

## 2 Adjoint d'un endomorphisme

On introduit maintenant la notion d'adjoint, qui offre une **vision dualiste** de la théorie des endomorphismes, ce que l'on ressent notamment dans les propositions de la fin de cette section.

**Définition 10** Soit  $u \in L(E)$  un endomorphisme. Alors il existe un unique endomorphisme  $u^* \in L(E)$ , appelé *adjoint de  $u$* , tel que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

De plus, si  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$ , et si  $A$  est la matrice de  $u$  dans cette base, alors la matrice de  $u^*$  dans cette base est  ${}^tA$ .

**Exemple 11** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifie  ${}^tAA = 0$ , alors  $A$  est nulle.

**Application 12** L'adjoint se généralise au cas d'une application linéaire  $f$  entre deux espaces euclidiens  $E$  et  $E'$ . Si  $f$  est injective, on peut définir l'*inverse généralisée* de  $f$  par  $\tilde{f} := (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$  et montrer à l'aide du projecteur orthogonal sur  $\text{Im}(f)$  que la solution des moindres carrés de l'équation

$$f(x) = b,$$

c'est-à-dire le vecteur  $x_0 \in E$  qui minimise la norme  $\|f(x) - b\|$  sur  $E$ , est donnée par  $x_0 = \tilde{f}(b)$ . Dans le cas inversible, le système est compatible et  $\tilde{f} = f^{-1}$ , ce qui donne la solution habituelle du système linéaire.

**Proposition 13**

(i) L'application  $u \mapsto u^*$  est linéaire et involutive, i.e.

$$\forall u \in L(E) \quad u^{**} = u.$$

(ii)  $\text{Id}^* = \text{Id}$ .

(iii) Pour tout couple d'endomorphismes  $(u, v) \in L(E)^2$ , on a  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ .

(iv) Le rang et le déterminant sont conservés par le passage à l'adjoint.

**Proposition 14** Si  $F$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $u^*$ .

*Démonstration.* On donne la preuve de ce résultat élémentaire qui, avec l'aide d'hypothèses supplémentaires sur l'adjoint comme on en aura dans les parties suivantes, permettra de déduire des propriétés de stabilité qui sont à la base des théorèmes de réductions présentés dans cette leçon.

On veut montrer que  $F^\perp$  est  $u^*$ -stable. On se donne donc  $x \in F^\perp$  et  $y \in F$ . On a

$$\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = 0$$

puisque  $y \in F$  (et donc  $u(y) \in F$ , par stabilité), et  $x \in F^\perp$ . On en déduit que  $u^*(x) \in F^\perp$ . □

## II Étude des endomorphismes orthogonaux

Dans cette partie, on étudie les transformations de  $E$  qui **préservent le produit scalaire** qui est à la base de la structure euclidienne. On commence par décrire la structure de groupe que l'on peut mettre sur leur ensemble, avant de donner des propriétés topologiques et algébriques plus poussées. Enfin, on étudiera le cas des petites dimensions, qui sont très visuels puisqu'ils correspondent aux transformations que l'on observe dans le plan et dans l'espace (rotations et symétries), avant de généraliser cette étude à la **réduction** de ces endomorphismes en dimension quelconque.

## 1 Groupe orthogonal

**Définition 15** On dit qu'un endomorphisme  $u \in L(E)$  est *orthogonal* s'il préserve le produit scalaire :

$$\forall x, y \in E \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

On note  $O(E)$  le sous-ensemble de  $L(E)$  des endomorphismes orthogonaux.

**Proposition 16** Soit  $u \in L(E)$ . Il y a équivalence entre les énoncés suivants :

- (i)  $u$  est orthogonal.
- (ii)  $u$  préserve la norme, i.e.  $\|u(x)\| = \|x\|$  pour tout  $x \in E$ .
- (iii)  $u^* \circ u = u \circ u^* = \text{Id}$ .
- (iv) Si  $A$  est la matrice de  $u$  dans une base orthonormée de  $E$ , alors  ${}^tAA = A{}^tA = \text{Id}$ .

**Remarque 17** On note  $O_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices vérifiant la relation donnée en (iv), de sorte que  $O(\mathbb{R}^n)$  est isomorphe *via* la donnée d'une base orthonormée à  $O_n(\mathbb{R})$ .

**Exemple 18** Les isométries vectorielles de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  (rotations et réflexions) sont des endomorphismes orthogonaux, tout comme les symétries orthogonales. De plus, une homothétie est orthogonale si et seulement si elle est de rapport  $\pm 1$ .

**Contre-exemple 19** Les projecteurs orthogonaux (sauf l'identité) n'en sont pas.

**Proposition 20** Soit  $u \in O(E)$ . Alors ses valeurs propres réelles (si elles existent) sont dans  $\{\pm 1\}$ , et  $u$  est de déterminant  $\pm 1$ . En particulier,  $O(E)$  est un sous-groupe de  $GL(E)$ .

**Corollaire 21**  $O_n(\mathbb{R})$  contient la matrice identité, et est stable par produit. De plus, c'est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$ .

**Remarque 22** Vu comme matrice à coefficients complexes,  $A \in O_n(\mathbb{R})$  peut avoir d'autres valeurs propres : elles vérifient cependant toutes  $|\lambda| = 1$ .

**Définition 23** Si  $u \in O(E)$  est de déterminant 1, on dit que  $u$  est *direct*, et sinon, qu'il est *indirect*. On note  $SO(E)$  le sous-ensemble de  $O(E)$  des isométries directes, et  $O^-(E)$  celui des isométries indirectes. On introduit aussi le *groupe spécial orthogonal*  $SO_n(\mathbb{R})$  des matrices de  $O_n(\mathbb{R})$  de déterminant 1.

**Remarque 24** En tant que noyau d'un morphisme de groupes,  $SO(E)$  (resp.  $SO_n(\mathbb{R})$ ) est un sous-groupe distingué de  $O(E)$  (resp.  $O_n(\mathbb{R})$ ).

**Proposition 25** Un endomorphisme est orthogonal si et seulement s'il transforme une base orthonormée de  $E$  en une base orthonormée de  $E$  si et seulement s'il transforme toute base orthonormée de  $E$  en une base orthonormée de  $E$ .

**Théorème 26 (Décomposition de Householder)** Toute matrice  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  s'écrit sous la forme  $A = QR$  où  $Q$  est orthogonale et  $R$  triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Plusieurs algorithmes permettent d'obtenir cette décomposition  $QR$ . On peut notamment citer l'algorithme de **Givens**, qui utilise astucieusement les rotations planes pour faire apparaître des zéros sous la diagonale, ce qui fournit une méthode **plus stable** que celle de **Schmidt** (qui consiste simplement à appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt aux colonnes de  $A$ ). Cette décomposition a de nombreuses applications. En particulier, elle permet d'obtenir une **méthode d'approximation des valeurs propres** d'une matrice réelle (ou complexe) : la suite construite en itérant à partir de  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  et en prenant à chaque étape  $A_{k+1} = R_k Q_k$ , où  $Q_k R_k$  est la décomposition de  $A_k$ , converge sous les bonnes hypothèses vers une matrice triangulaire ayant sur sa diagonale les valeurs propres de  $A$ .

## 2 Quelques remarques topologiques et algébriques

On essaie ici de fournir un éventail des propriétés des groupes orthogonaux et spéciaux orthogonaux. On verra que ces propriétés permettent notamment d'obtenir des résultats intéressants sur le corps des quaternions, et réciproquement.

**Proposition 27**  $O_n(\mathbb{R})$  et  $SO_n(\mathbb{R})$  sont des sous-groupes compacts de  $GL_n(\mathbb{R})$ . De plus, tout sous-groupe compact maximal de  $GL_n(\mathbb{R})$  est conjugué à  $O_n(\mathbb{R})$ .

**Proposition 28**  $SO_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.  $O_n(\mathbb{R})$  admet  $SO_n(\mathbb{R})$  et  $O_n^-(\mathbb{R})$  (qui est homéomorphe à  $SO_n(\mathbb{R})$ ) comme composantes connexes.

*Démonstration.* Pour montrer que  $SO_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs, le plus simple est d'utiliser le théorème de réduction des endomorphismes orthogonaux (théorème 41) que l'on verra plus tard. On va ici montrer la connexité de  $SO_n(\mathbb{R})$  sans utiliser ce théorème.

On utilisera deux résultats de topologie dont on donne ici les énoncés avec les hypothèses utilisées dans cette preuve, même si ceux-ci restent vrais avec des hypothèses plus faibles (voir [Tau00]Th 2.3.2, [VIKN08]28.Fx) :

- Si  $G$  est un groupe topologique compact agissant continûment sur un ensemble  $X$  compact, alors pour tout  $x \in X$ , le morphisme d'action de  $G$  vers l'orbite  $G \cdot x$  se factorise en un homéomorphisme de  $G/G_x$  sur  $G \cdot x$  ( $G_x$  désigne le stabilisateur).
- Si  $G/H$  et  $H$  sont connexes, alors  $G$  l'est aussi.

On observe que  $SO_n(\mathbb{R})$  agit transitivement sur la sphère unité  $\mathbb{S}^{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$  (puisque tout vecteur  $x$  de  $\mathbb{S}^{n-1}$  est le premier vecteur d'une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^n$ ). Comme  $SO_n(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{S}^{n-1}$  sont compacts, en notant  $e_1$  le premier vecteur de la base canonique,  $SO_n(\mathbb{R})/(SO_n(\mathbb{R}))_{e_1}$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^{n-1}$ , et donc connexe. Mais comme ce stabilisateur est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

avec  $M \in SO_{n-1}(\mathbb{R})$ , on en déduit que  $SO_n(\mathbb{R})/SO_{n-1}(\mathbb{R})$  est connexe. Or  $SO_1(\mathbb{R}) = \{1\}$  est connexe, donc un raisonnement par récurrence sur  $n$  permet de conclure.

Comme l'application  $A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} A$  est un homéomorphisme de  $SO_n(\mathbb{R})$  dans  $O^{-n}(\mathbb{R})$ ,

on en déduit que  $O_n^-(\mathbb{R})$  est aussi connexe, ce qui fournit la décomposition de  $O_n(\mathbb{R})$  en deux composantes connexes. □

**Définition 29** On distingue parmi les symétries orthogonales (éléments de  $O_n(\mathbb{R})$  annulés par le polynôme  $X^2 - 1$ ) deux cas particuliers :

- Si le sous-espace propre associé à la valeur propre  $-1$  pour  $A$  est de dimension 1, i.e. si  $A$  est

semblable (dans une base orthonormée) à  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ , on dit que  $A$  est une *réflexion*.

- Si le sous-espace propre associé à la valeur propre  $-1$  pour  $A$  est de dimension 2, i.e. si  $A$  est sem-

blable (dans une base orthonormée) à  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$ , on dit que  $A$  est un *renversement*.

**Proposition 30** (i) Si  $n \geq 2$ , toute matrice orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  est produit d'au plus  $n$  réflexions. En particulier, les réflexions engendrent  $O_n(\mathbb{R})$ .

(ii) Si  $n \geq 3$ , toute matrice orthogonale directe de  $\mathbb{R}^n$  est produit d'au plus  $n - 1$  renversements. En particulier, les renversements engendrent  $SO_n(\mathbb{R})$ .

**Théorème 31**  $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.

*Idée de preuve.* On se donne un sous-groupe distingué non trivial  $H$  de  $SO_3(\mathbb{R})$ . Tout d'abord, on invoque la proposition précédente et le fait que les renversements sont conjugués dans  $SO_3(\mathbb{R})$  pour se ramener à l'existence d'un renversement dans  $H$ . Ensuite, on se donne un élément non trivial  $u$  de  $H$ , qui d'après la proposition 38 est une rotation. On va alors pouvoir montrer que si la distance entre deux éléments  $x$  et  $y$  de la sphère unité est assez petite (borne définie par l'angle de  $u$ ), alors il existe un conjugué dans  $SO_3(\mathbb{R})$  de  $u$  qui envoie  $x$  sur  $y$ . Comme  $\mathbb{R}$  est archimédien, on peut choisir  $x$  sur l'équateur et  $y$  le vecteur obtenu en effectuant une rotation d'angle  $\frac{\pi}{n}$  (avec  $n$  assez grand pour respecter la condition sur la distance) depuis  $x$  autour de l'axe de  $u$ , et itérer  $n$  fois : on aura un produit de  $n$  conjugués de  $u$ , qui est donc un élément de  $H$ , qui effectue une rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe de  $u$  : c'est un renversement.  $\square$

On introduit le corps des quaternions et on donne quelques résultats dont la démonstration ne pose pas de difficultés et que l'on utilisera dans la démonstration du théorème 34.

**Définition 32** On note  $\mathbb{H}$  le corps des quaternions :

$$\mathbb{H} := \{a + ib + jc + kd \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^4.$$

On rappelle les relations entre les générateurs :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

On définit la conjugaison quaternionique par

$$\bar{q} = a - ib - jc - kd \quad \text{si } q = a + ib + jc + kd$$

et la norme quaternionique par

$$N(q) = \sqrt{q\bar{q}},$$

qui correspond à la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^4$ .

**Proposition 33** (i) La norme est multiplicative :

$$\forall q, q' \in \mathbb{H} \quad N(qq') = N(q)N(q').$$

(ii) Le centre de  $\mathbb{H}^*$  est  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 34 (Quaternions et groupe spécial orthogonal)** Soit  $G$  le sous-groupe du corps des quaternions composé des éléments de norme 1. Alors  $G/\{\pm 1\}$  est isomorphe à  $SO_3(\mathbb{R})$ .

Ce théorème fait l'objet de mon premier développement.

**Application 35** Tous les automorphismes du corps des quaternions sont intérieurs.

Il est possible de déduire d'autres résultats reliant le corps des quaternions à  $O_4(\mathbb{R})$ , et d'énoncer à partir de là des propriétés de **connexité** sur ce groupe orthogonal.

### 3 Étude de $O_2(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$

**Proposition 36**  $SO_2(\mathbb{R})$  est l'ensemble des rotations, données par  $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  où  $\theta$  est l'angle de la rotation.  $O_2^-(\mathbb{R})$  est l'ensemble des symétries orthogonales, données par  $S(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ , où  $\frac{\theta}{2}$  est l'angle par rapport à  $\mathbb{R}e_1$  de la droite vectorielle par rapport à laquelle se fait la symétrie. On voit sur la figure 1 une illustration de ces deux possibilités.

**Remarque 37** On en déduit que la composée de deux symétries orthogonales est une rotation. Réciproquement, toute rotation est le produit de deux symétries orthogonales, via le calcul

$$R(\theta) = S(\theta) \circ S(0).$$



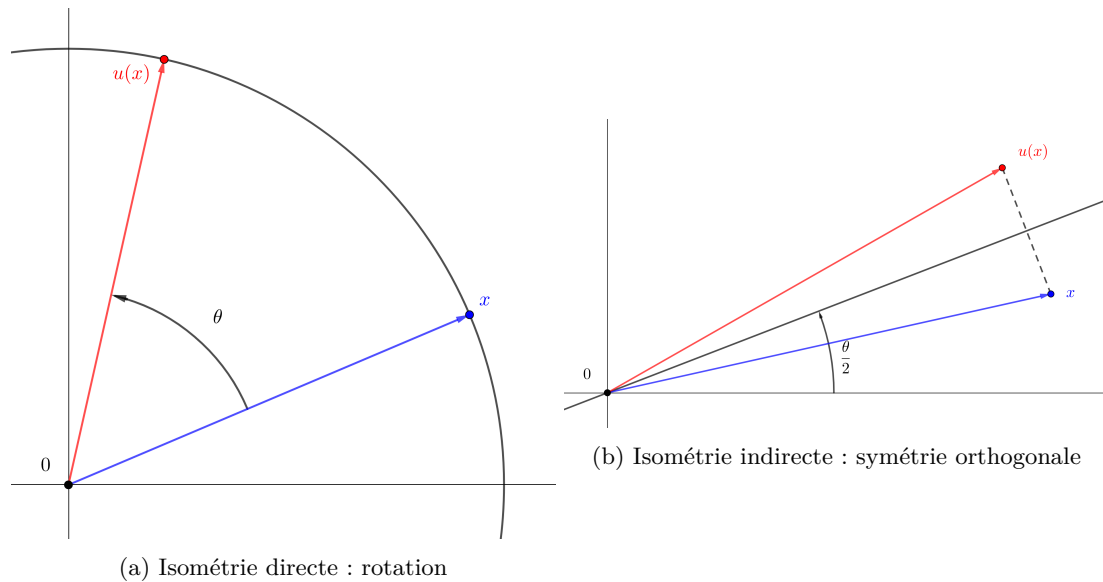


FIGURE 1 – Isométries vectorielles de  $\mathbb{R}^2$

**Proposition 38** Si  $A \in O_3(\mathbb{R})$ ,  $A$  est semblable à la matrice par blocs

$$\left( \begin{array}{c|c} R(\theta) & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon \end{array} \right)$$

où  $\theta$  est un angle réel et  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ . De plus,  $A$  est de déterminant  $\varepsilon$ , donc  $A \in SO_3(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\varepsilon = 1$ .  $A$  correspond donc à la rotation d'angle  $\theta$  autour d'un axe donné, suivi éventuellement (si  $\varepsilon = -1$ ) d'une symétrie par rapport au plan orthogonal à l'axe de rotation (voir figure 2). Si  $A \in O_3(\mathbb{R})$  est différente de  $\pm \text{Id}$ , deux cas disjoints sont possibles :

- (i)  $A$  est directe, et l'angle non orienté de la rotation se déduit de la trace de  $A$  :

$$\text{Tr}(A) = 2 \cos(\theta) + 1.$$

- (ii)  $A$  est indirecte, et l'angle non orienté de la rotation effectuée avant la symétrie est donnée par la trace

$$\text{Tr}(A) = 2 \cos(\theta) - 1.$$

Dans ce cas, si  $\theta$  est nul, on dit que  $A$  est la réflexion dont le plan est celui par rapport auquel se fait la symétrie.

**Exemple 39** Soit  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ . Le calcul des produits scalaires entre colonnes de  $A$  montre que  $A$  est orthogonale. Le calcul de son déterminant montre que  $A$  est directe. C'est donc une rotation, celle d'angle  $\frac{\pi}{3}$  autour de l'axe  $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

## 4 Réduction des endomorphismes orthogonaux

On démontre finalement un premier **théorème de réduction**, qui donne la forme générale des endomorphismes orthogonaux.

**Proposition 40** Soit  $u \in O(E)$  et  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $F^\perp$  est stable par  $u$ .



Ce théorème généralise bien sûr les résultats observés dans le plan et dans l'espace à la section précédente.

## III Étude des endomorphismes auto-adjoints

### 1 Réduction des endomorphismes auto-adjoints

**Définition 42** Soit  $u \in L(E)$ . On dit que  $u$  est *auto-adjoint* ou *symétrique* si  $u^* = u$ . C'est équivalent à dire que sa matrice dans une (resp. toute) base orthonormée de  $E$  est symétrique. On dit aussi que  $u$  est *anti-symétrique* si  $u^* = -u$ , auquel cas sa matrice dans les bases orthonormées est anti-symétrique. On note respectivement  $S_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})$  les ensembles des matrices symétriques et anti-symétriques.

**Exemple 43** Si  $p$  est un projecteur de  $E$ , il est orthogonal si et seulement s'il est auto-adjoint.

**Proposition 44**  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est somme directe de  $S_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})$ .

On va tout de suite déduire un nouveau théorème de réduction, qui va nous permettre de donner un intérêt à la section suivante.

**Théorème 45 (Théorème spectral pour les endomorphismes auto-adjoints)** Soit  $u \in L(E)$  un endomorphisme auto-adjoint. Alors

- (i)  $u$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  (en particulier, ses valeurs propres sont réelles).
- (ii) Ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, ce qui permet de construire, en prenant une base orthonormée de chacun d'entre eux, une base orthonormée de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ .

**Remarque 46** On en déduit que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (en base orthonormée) et admet des sous-espaces deux à deux orthogonaux.

*Idée de preuve.* On montre d'abord que les valeurs propres d'un endomorphisme auto-adjoint sur  $E$  sont réelles, en étudiant ses vecteurs propres complexes et leurs conjugués dans le complexifié de  $E$ . Ensuite on montre que deux espaces propres pour un même endomorphisme auto-adjoint sont orthogonaux, puis on conclut par récurrence de manière similaire au théorème 41, en évoquant la propriété de stabilité de l'orthogonal d'un espace stable par l'adjoint (qui est ici l'endomorphisme lui-même).  $\square$

### 2 Décomposition polaire

**Définition 47** On dit qu'une matrice symétrique  $A \in S_n(\mathbb{R})$  est positive (resp. définie positive) si  $\langle x, Ax \rangle$  est positif (resp. strictement positif) pour tout vecteur  $x$  non nul de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $S_n^+(\mathbb{R})$  (resp.  $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies positives).

**Exemple 48** La nature (symétrique positive, symétrique négative, ou symétrique avec des valeurs propres des deux signes) de la hessienne d'une fonction de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$  donne la nature des points critiques associés (minimum local, maximum local, point col).

**Exemple 49** Toute matrice symétrique définie positive est la matrice de covariance d'un unique vecteur gaussien de moyenne fixée.

**Proposition 50**  $A \in S_n(\mathbb{R})$  est une matrice de produit scalaire si et seulement si elle est définie positive.

**Théorème 51 (Décomposition polaire)** L'application

$$\Phi : \begin{array}{l} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ (O, S) \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \begin{array}{l} GL_n(\mathbb{R}) \\ OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Ce théorème, ainsi que les deux applications, font l'objet de mon second développement.



offrent des précisions sur les  $\lambda_i$  et les  $\tau_j$  qui apparaissent dans la forme réduite des endomorphismes normaux, comme on l'a vu dans l'exemple précédent.

Un autre point de vue sur cette leçon pourrait donc être de commencer par l'étude faite dans cette dernière partie des endomorphismes normaux, avant de particulariser aux résultats donnés en parties II et III.

# Développements

## I Quaternions et groupe spécial orthogonal

**Ref :** [Per96] (§VII.2)

Ce développement consiste à démontrer le théorème 34. On a défini le *groupe des quaternions*  $G$  comme l'ensemble des quaternions de norme 1, muni du produit. L'inverse d'un élément  $q$  est alors son conjugué.

**Théorème** Il existe un isomorphisme de groupes entre  $G/\{\pm 1\}$  et  $SO_3(\mathbb{R})$ .

*Démonstration. Étape 1. Action de  $G$  sur  $\mathbb{H}$ .*

On considère l'action de  $G$  sur  $\mathbb{H}$  par conjugaison : pour  $q \in G$ , on définit l'application

$$S_q : \begin{cases} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ q' & \longmapsto & qq'\bar{q} \end{cases} .$$

Tout d'abord, cette application est linéaire (car  $\mathbb{R}$  est central dans  $\mathbb{H}$ , voir proposition 33) et bijective, puisque  $S_{\bar{q}}$  fournit un inverse à  $S_q$  (cela découle du fait que l'action par conjugaison est bien une action de groupes). On en déduit que le morphisme de l'action  $S : G \longrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{H})$  est à valeurs dans le groupe des automorphismes de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ , qui est isomorphe à  $GL_4(\mathbb{R})$ . On a donc un morphisme de groupe

$$S : G \longrightarrow GL_4(\mathbb{R}).$$

De plus, son noyau est par définition la trace dans  $G$  du centre de  $\mathbb{H}$ , c'est à dire  $\mathbb{R} \cap G = \{\pm 1\}$ .

*Étape 2. Restriction de l'action à l'espace des quaternions purs.*

Pour un élément  $q \in G$  donné,  $S_q$  préserve la norme quaternionique (par multiplicativité de cette norme), et donc la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^4$  :

$$\forall q' \in \mathbb{H} \quad N(S_q(q')) = N(q)N(q')N(\bar{q}) = N(q').$$

D'après la proposition 16, c'est dire que  $S_q$  est un élément de  $O_4(\mathbb{R})$ . De plus,  $G$  agit trivialement sur  $\mathbb{R}$  (puisque  $\mathbb{R} = Z(\mathbb{H})$ ), et donc laisse également stable son orthogonal (par la proposition 40), qui est l'ensemble  $P := \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$  des quaternions purs. Ainsi,  $s_q := S_{q|P}$  est un élément de  $O_3(\mathbb{R})$ , et on construit ainsi un nouveau morphisme

$$s : G \longrightarrow O_3(\mathbb{R})$$

de noyau  $\{\pm 1\}$ <sup>1</sup>. De plus, cette application est continue (pour la topologie naturelle sur  $O_3(\mathbb{R})$ , vu comme un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^9$ ). En effet, le calcul de la matrice de  $s_q$  dans la base  $(i, j, k)$  de  $P$  montre que ses coefficients sont des polynômes homogènes de degré 2 en les coefficients de  $q$  : si  $q = a + ib + jc + kd$ , on a par exemple

$$s_q(i) = (ia - b - kc + jd)(a - ib - jc - kd) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + 2(ad + bc)j + 2(bd - ac)k,$$

et les trois coefficients sont bien polynomiaux. De plus,  $G$  est connexe car c'est la sphère unité  $\mathbb{S}^3$  de  $\mathbb{H}$ . Donc, en tant qu'image d'un connexe par une application continue,  $s(G)$  est connexe. Il est donc inclus

1. Si  $q$  est dans le noyau de  $s$ ,  $q$  agit trivialement par conjugaison sur  $P$ , et mais aussi sur  $\mathbb{R}$  puisque c'est le cas de tous les éléments de  $G$ . Donc  $q$  agit trivialement sur  $\mathbb{H}$ , ce qui montre que  $q$  est dans le noyau de  $S$ ,  $\{\pm 1\}$ . Réciproquement,  $-1$  et  $1$  sont bien dans le noyau de  $s$ .

dans l'une des composantes connexes de  $O_3(\mathbb{R})$  données par la proposition 28. Comme  $s_1 = s_{-1} = \text{Id}_P$  puisque  $\mathbb{R}$  est central dans  $\mathbb{H}$ ,  $s(G)$  contient l'identité et est donc inclus dans sa composante connexe, qui est  $SO_3(\mathbb{R})$ .

*Étape 3. Surjectivité de l'action obtenue.*

On va maintenant montrer que l'image de  $s$  est  $SO_3(\mathbb{R})$ . Tout d'abord, si  $q$  est un élément de  $G \cap P$ ,  $s_q(q) = qq\bar{q} = q$ , donc  $s_q$  fixe la droite vectorielle  $\mathbb{R}q$ . De plus, comme  $q^2 = -q\bar{q} = -1$  (puisque  $q$  est un quaternion pur, donc  $\bar{q} = -q$ ),  $s_q^2 = s_{-1} = \text{Id}$ . Donc  $s_q$  est une involution. Mais alors nécessairement, puisqu'elle est de déterminant 1, c'est un renversement (car  $s_q \neq \text{Id}$  comme  $q \notin \{\pm 1\}$ ). Comme on connaît la droite fixée par  $s_q$ , on en conclut<sup>2</sup> que  $s_q$  est justement le renversement d'axe  $\mathbb{R}q$ . Finalement, comme toutes les droites vectorielles de  $P$  contiennent un élément de  $G \cap P$ ,  $s(G)$  contient tous les renversements. Mais comme ceux-ci engendrent  $SO_3(\mathbb{R})$  (voir proposition 30), on a bien  $s(G) = SO_3(\mathbb{R})$ . D'après le théorème d'isomorphisme, on en déduit que  $s$  induit un isomorphisme de groupes

$$\bar{s} : G/\{\pm 1\} \longrightarrow SO_3(\mathbb{R}).$$

□

**Remarque** L'isomorphisme obtenu est explicite, mais son inverse est difficile à exprimer puisqu'il faut résoudre les équations polynomiales de degré 2 associées aux coefficients d'une matrice de  $SO_3(\mathbb{R})$ .

Ce résultat montre que, de même que les complexes sont fortement liés au groupe orthogonal en dimension 2, les quaternions jouent un rôle important vis-à-vis du groupe orthogonal en dimension 3. Comme on l'a déjà précisé dans le plan, il existe aussi d'autres résultats reliant les quaternions à  $O_4(\mathbb{R})$ . Ce développement a donc une place importante dans cette leçon, puisqu'il permet à la fois de donner des informations sur le groupe orthogonal et d'illustrer comment on peut déduire de propriétés de ces groupes des informations sur d'autres objets beaucoup plus généraux, comme le corps des quaternions. De plus, plusieurs résultats importants de la leçon (stabilité de l'orthogonal, partie génératrice de  $SO_3(\mathbb{R})$ , etc) sont utilisés au cours de la démonstration, qui donne donc un éventail des différents types de raisonnement que l'on peut avoir quand l'on traite des endomorphismes orthogonaux.

---

2. En dimension 3, l'orthogonal du plan dans lequel on fait la rotation est une droite, ce qui permet de caractériser les renversements par leur plan aussi bien que par leur droite propre.

## II Décomposition polaire et applications

**Ref :** [CG13] VI.1+[FGN09] 2.28

Ce développement est plus classique que le premier, et il faut parfois l'adapter à la leçon dans laquelle on le présente. Initialement, je préfère montrer si possible le résultat dans le cas complexe, mais dans le cadre de la leçon 160 on donne l'énoncé et la démonstration dans le cas réel (théorème 51) pour concorder avec la notion d'espace euclidien. De plus, les deux corollaires présentés en fin de développements sont deux applications dont les démonstrations ont des durées différentes, ce qui permet de moduler en fonction du temps restant à l'issue de la démonstration du théorème de décomposition polaire.

**Théorème (Décomposition polaire des matrices réelles)** L'application

$$\Phi : \begin{cases} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto OS \end{cases}$$

est un homéomorphisme.

*Démonstration. Étape 1. Surjectivité de  $\Phi$ .*

On se donne  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . On remarque tout d'abord que  ${}^tAA$  est symétrique définie positive. En effet, on a

$$- {}^t({}^tAA) = {}^tA{}^tA = {}^tAA$$

- si  $X$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\langle {}^tAAX, X \rangle = \langle AX, AX \rangle = \|AX\|^2 > 0$ , car  $A$  est inversible.

Ainsi, d'après le théorème spectral (théorème 45), il existe une matrice orthogonale  $P \in O_n(\mathbb{R})$  qui diagonalise  ${}^tAA$ , c'est à dire qu'il existe des réels  $d_1, \dots, d_n$  tous strictement positifs tels que

$${}^tAA = {}^tPDP,$$

avec  $D = \text{diag}(d_i)_{1 \leq i \leq n}$ . On note alors  $\sqrt{D} := \text{diag}(\sqrt{d_i})_{1 \leq i \leq n}$ , et on pose

$$S := {}^tP\sqrt{D}P.$$

On voit alors que puisque  $P$  est orthogonale,  $S^2 = {}^tAA$ . On pose alors  $O := AS^{-1}$ , de sorte que l'on a  $OS = A$ . Comme  ${}^tS = S$ ,  $S$  est symétrique. De plus, ses valeurs propres propres sont des réels strictement positifs (les  $\sqrt{d_i}$ ), donc elle est définie positive. On a également  ${}^tOO = {}^t(S^{-1}){}^tAAS^{-1} = {}^t(S^{-1}){}^tSSS^{-1} = I_n$ , donc  $O$  est orthogonale. On en déduit que  $A = \Phi(O, S)$ .

*Étape 2. Injectivité de  $\Phi$ .*

On se donne une seconde décomposition  $A = O'S'$  de  $A$  dans  $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ . On a alors

$${}^tAA = {}^tS'{}^tO'O'S' = S'^2.$$

Or on a déjà vu que  ${}^tAA = S^2$ . On se donne un polynôme  $\Pi \in \mathbb{R}[X]$  qui interpole les  $d_i$  sur les  $\sqrt{d_i}$ . On a alors

$$S = {}^tP\Pi(D)P = \Pi({}^tPDP) = \Pi({}^tAA) = \Pi(S'^2).$$

Donc  $S$  est un polynôme en  $S'$ , et donc  $S$  et  $S'$  commutent. Mais comme elles sont toutes les deux diagonalisables (d'après le théorème spectral), elles sont codiagonalisables. Il existe donc deux familles  $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(s'_i)_{1 \leq i \leq n}$  de réels strictement positifs et une matrice  $R \in GL_n(\mathbb{R})$  telles que

$$\begin{cases} S = R^{-1}\text{diag}(s_i)R \\ S' = R^{-1}\text{diag}(s'_i)R \end{cases}.$$

Mais comme  $S^2 = S'^2$ , on doit donc avoir  $s_i^2 = s'^2_i$  pour tout  $i$ , et donc  $s_i = s'_i$  puisque ces coefficients sont des réels positifs. Finalement, on obtient  $S = S'$ . On en déduit également  $O = O'$ . Donc  $\Phi$  est injective.

*Étape 3. Continuité de  $\Phi^{-1}$ .*

Puisque le produit matriciel est continu,  $\Phi$  l'est. Il reste à montrer que  $\Phi^{-1}$  l'est aussi. Puisque l'on se trouve dans des espaces métriques, on va montrer qu'elle est séquentiellement continue. On se donne donc une suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , qui converge dans  $GL_n(\mathbb{R})$  vers  $A$ . On note également pour tout  $k$

$$A_k = O_kS_k$$



la décomposition polaire de  $A_k$ , et de même  $A = OS$ . On sait que l'espace  $O_n(\mathbb{R})$  est compact (proposition 27). Donc la suite  $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$  admet une valeur d'adhérence, que l'on note  $Q$ . Il existe donc une extractrice  $\varphi$  telle que la suite  $(O_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $Q$ . Par continuité du produit matriciel, la suite  $(S_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge alors vers  $H := {}^tQA$ . Comme l'espace  $S_n^+(\mathbb{R})$  des matrices semi-définies positives est fermé, et que  $H$  est limite d'une suite d'éléments de  $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset S_n^+(\mathbb{R})$ , elle est symétrique semi-définie positive, et elle est aussi inversible puisque  $A$  et  ${}^tQ$  le sont, donc elle est finalement définie positive. Donc  $QH$  est une décomposition polaire de  $A$ . Ainsi, par unicité, on a  $Q = O$  et  $H = S$ . Comme la valeur d'adhérence est unique, la suite  $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $O$ , et donc  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $S$  (toujours par continuité du produit matriciel). Donc  $\Phi^{-1}$  est continue.  $\square$

**Corollaire** Si  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , alors  $\|A\| = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ .

*Démonstration.* Soit  $A = OS \in GL_n(\mathbb{R})$ . Alors comme  $O \in O_n(\mathbb{R})$ , on a  $\|Ax\| = \|Sx\|$  pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ . On a donc  $\|A\|_2 = \|S\|_2$ . Comme  $S$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , composée de vecteurs propres pour les valeurs correspondantes, qui sont positives strictement,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ . Soit alors  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  de norme 1, on a

$$\|Sx\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i \right\|^2 \leq |\lambda_1|^2 \|x\|^2 = |\lambda_1|.$$

De plus, le cas d'égalité est atteint pour  $x = e_1$ . Donc  $\|S\|_2 = \rho(S)$ . On en déduit :

$$\|A\|_2 = \|S\|_2 = \rho(S) = \sqrt{\lambda_1^2} = \sqrt{\rho(S^2)} = \sqrt{\rho({}^tAA)}$$

car  ${}^tAA = {}^tS{}^tOOS = S^2$ .  $\square$

**Corollaire** Les points extrémaux de la boule unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont exactement les éléments de  $O_n(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.*

- Montrons que  $O \in O_n(\mathbb{R})$  est extrémal dans la boule unité. Supposons que  $O = \frac{1}{2}(A + B)$ , avec  $A, B$  deux éléments de norme inférieure à 1. On a pour  $x \in E$  unitaire

$$\|x\| = \|Ox\| = \frac{1}{2} \|Ax + Bx\| \leq \frac{1}{2} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \frac{1}{2} (\|A\| + \|B\|) \leq 1.$$

Comme  $x$  est de norme 1, toutes les inégalités sont des égalités. On en déduit que  $A$  et  $B$  sont de norme 1, que  $Ax$  et  $Bx$  sont de norme 1, et qu'ils sont positivement liés. Ainsi, on a nécessairement  $Ax = Bx$ , et donc  $A = B$  car ceci est vrai pour tout vecteur unitaire. Donc  $O$  est extrémal.

- Réciproquement, si  $A$  est de norme inférieure à 1 et non unitaire, on écrit  $A = OS$  la décomposition polaire de  $A$  (ici,  $S$  est seulement semi-définie positive). Comme  $S$  est symétrique, elle est orthodiagonalisable : il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D$  diagonale à coefficients réels telles que  $S = {}^tPDP$ . Comme  $\|S\| = \|A\|$ , les coefficients diagonaux  $\lambda_i$  sont tous compris entre  $-1$  et  $1$ . De plus, comme  $A$  n'est pas unitaire, au moins l'un des  $\lambda_i$  (supposons que c'est  $\lambda_1$ ) est strictement compris entre  $-1$  et  $1$ . On pose alors  $\lambda_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$  avec  $\alpha \neq \beta \in [-1, 1]$ , et on note  $D' = \text{diag}(\alpha, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  et  $D'' = \text{diag}(\beta, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Alors  $A = \frac{1}{2} (O{}^tPD'P + O{}^tPD''P)$ . On a de plus, pour  $x$  unitaire

$$\|O{}^tPD'Px\|^2 = \|D'Px\|^2 \leq \|D'\|^2 \|Px\|^2 \leq 1,$$

donc  $O{}^tD'P$  est dans la boule unité, ainsi que  $O{}^tPD''P$ . Donc  $A$  est combinaison convexe de deux éléments distincts de la boule, et n'est donc pas extrémal.  $\square$

Ce développement consiste à démontrer un théorème analogue à celui de décomposition polaire des nombres complexes : on sait bien sûr que tout élément de  $\mathbb{C}^*$  s'écrit de manière unique sous la forme  $z = \rho e^{i\theta}$ , pour  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in [0, 2\pi)$ . On peut démontrer (exactement de la même manière que pour le théorème de décomposition polaire des matrices réelles) le théorème suivant, en se plaçant cette fois dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On note ici  $H_n = H_n(\mathbb{C})$  l'espace des matrices hermitiennes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $H_n^{++} = H_n^{++}(\mathbb{C})$  son sous-espace des matrices définies positives, et  $U_n = U_n(\mathbb{C})$  l'espace des matrices unitaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Théorème (Décomposition polaire des matrices complexes)** L'application

$$\Phi : \begin{cases} H_n^{++} \times U_n & \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ (H, Q) & \longmapsto HQ \end{cases}$$

est un homéomorphisme. En particulier, tout élément  $M$  de  $GL_n(\mathbb{C})$  s'écrit donc de manière unique sous la forme

$$M = R \exp(i\Theta),$$

avec  $R \in H_n^+$  et  $\Theta \in H_n$ .

**Exemple** On prend  $M = \begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ . On a alors

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \exp \left( i \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \right),$$

ce qui donne une décomposition polaire de  $M$  sous la forme  $M = H \exp i\Theta$ .

Le théorème de décomposition polaire est un résultat phare de la leçon 160. C'est un joli résultat, qui combine des méthodes de réflexions liées aux endomorphismes orthogonaux et aux endomorphismes auto-adjoints. Plusieurs résultats variés issus de différentes parties du plan (théorème spectral, topologie du groupe orthogonal) sont mis en oeuvre pour démontrer le théorème, qui permet ensuite de préciser encore un peu plus la structure de l'algèbre des endomorphismes  $L(E)$ . De tels résultats justifient amplement le qualificatif "remarquable" employé pour désigner les endomorphismes étudiés au cours de cette leçon.

Il faut remarquer que plusieurs autres résultats du plan auraient pu faire l'objet d'un développement, à commencer par les théorèmes de réduction (surtout celui des endomorphismes normaux). De même, la simplicité de  $SO_3(\mathbb{R})$  peut être mise en valeur. Le corollaire sur les points extrémaux de la boule unité de  $L(E)$  pourrait aussi convenir, à condition de développer les arguments, notamment la caractérisation de l'extrémalité dans un ensemble connexe, qui est ici admise. Finalement, on pouvait aussi citer une autre application du théorème spectral, qui consiste à démontrer que l'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de l'ensemble des matrices symétriques sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

# Oral blanc en classe

Je résume ici les questions qui m'ont été posées le jour de la présentation de la leçon en classe, en y apportant des réponses. Le développement effectué en classe est le premier, sur les quaternions, et c'est pourquoi les questions sont plutôt axées sur ce sujet-là. J'ai essayé de retranscrire les questions dans l'ordre dans lequel elles ont été posées. En particulier, le développement a parfois été utilisé pour répondre aux questions générales, mais celles-ci figurent tout de même dans la seconde partie puisqu'elles ont été posées après l'échange sur la démonstration.

## Questions sur le développement

- **Montrer que  $\mathbb{R}$  est le centre de  $\mathbb{H}$ , et que la norme est multiplicative.**

La définition de  $\mathbb{H}$  comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel montre que  $\mathbb{R}$  est central dans  $\mathbb{H}$ . Réciproquement, soit  $q = a + ib + jc + kd$  un élément central non nul de  $\mathbb{H}$ . On a par exemple, en écrivant  $qi = iq$  :

$$ia - b - kc + jd = ia - b + kc - jd,$$

et donc  $c = d = 0$ . De même, en écrivant  $qj = jq$ , on obtient  $b = 0$ , et donc  $q \in \mathbb{R}$ .

De la même manière, on montre la multiplicativité de la norme en calculant la norme d'un produit de deux quaternions et le produit des deux normes séparément.

- **Énoncer le théorème analogue qui relie  $\mathbb{C}$  à un groupe orthogonal.**

On note  $\mathbb{S}^1$  le groupe des complexes de module 1. Alors la multiplication complexe induit un isomorphisme entre  $\mathbb{S}^1$  et  $SO_2(\mathbb{R})$  :  $\mathbb{C}$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^2$ , et la multiplication

$$S_{e^{i\theta}} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta} z \end{cases}$$

permet de faire le même raisonnement que celui du développement, puisque la  $S_{e^{i\theta}}$  est représentée par la rotation  $R(\theta)$ .

- **Donner le quaternion (modulo  $\pm 1$ ) associé à la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbb{R}k$ .**

Dans la base  $(i, j, k)$  de  $P$ , la matrice de la rotation étudiée est  $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On

écrit la matrice de rotation  $R(\theta)$  comme le produit de deux réflexions  $S(\theta)$  et  $S(0)$ , ce qui permet d'écrire

$$A = \begin{pmatrix} S(\theta) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(0) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On reprend alors la troisième étape du développement. La matrice de droite  $\begin{pmatrix} S(0) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  correspond au renversement qui laisse stable le premier vecteur de base, qui est ici  $i$ . Donc c'est  $s_i$ . Le bloc de la matrice de gauche laisse stable le vecteur  $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc la matrice a pour vecteur propre

associé à 1 le vecteur  $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$ , ce qui signifie que c'est le renversement selon l'axe engendré par ce vecteur. C'est donc  $s_q$  avec  $q = i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . Finalement, la rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\mathbb{R}k$  est associée aux quaternions  $\pm \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ .

## Autres questions

- **Existe-t-il d'autres résultats de simplicité pour les groupes orthogonaux, que celui sur  $SO_3(\mathbb{R})$  ?**

On peut montrer que les groupes projectifs  $PSO_n(\mathbb{R})$  sont simples pour  $n = 3$  et  $n \geq 5$ .

- **Quelle est la nature de  $SO_3(\mathbb{R})$  ?**

On peut utiliser le résultat démontré en développement pour cette question : le théorème 34 montre que  $SO_3(\mathbb{R})$  est homéomorphe (à condition de montrer que l'inverse de l'isomorphisme est une application continue) au quotient d'une sphère de dimension 3 par la relation antipodale. C'est donc un espace projectif de dimension 3.

- **Montrer que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est normale si et seulement si elle commute avec  $A^tA$ .**

Le sens direct est évident. Il suffit de montrer le sens réciproque. On commence par démontrer que

$$\text{Tr}(({}^tAA)^2) = \text{Tr}(({}^tA)^2A^2).$$

On a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(({}^tAA)^2) &= \text{Tr}({}^tAA{}^tAA) \\ &= \text{Tr}(A{}^tAA{}^tA) \quad \text{car } \text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM) \text{ (avec } M = {}^tAA{}^tA, N = A) \\ &= \text{Tr}(AA{}^tA{}^tA) \quad \text{car } A{}^tAA = AA{}^tA \text{ par hypothèse} \\ \text{Tr}(({}^tAA)^2) &= \text{Tr}(({}^tA)^2A^2) \quad \text{en prenant } M = A^2, N = ({}^tA)^2 \end{aligned}$$

On étudie maintenant la matrice  $S = A{}^tA - {}^tAA$ , qui est symétrique. On a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(S^2) &= \text{Tr}((A{}^tA - {}^tAA)^2) \\ &= \text{Tr}((A{}^tA)^2) - \text{Tr}({}^tAA{}^tAA) + \text{Tr}(({}^tAA)^2) - \underbrace{\text{Tr}(A{}^tA{}^tAA)}_{\text{Tr}(({}^tA)^2A^2)} \\ &= \underbrace{\text{Tr}(A{}^tAA{}^tA)}_{\text{Tr}({}^tAA{}^tAA)} - \underbrace{\text{Tr}(A^2({}^tA)^2)}_{\text{Tr}(({}^tA)^2A^2)} \\ \text{Tr}(S^2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $S$  est une matrice symétrique réelle dont le carré a sa trace nulle. Or toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (théorème spectral), et la trace de  $S^2$  est alors la somme des carrés des valeurs propres de  $S$ . Donc chaque terme de la somme est nul, ce qui signifie que  $S$  a toutes ses valeurs propres nulles, et donc qu'elle est nulle, ce qui permet de conclure.

- **Que dire des automorphismes de  $SO_3(\mathbb{R})$  ?**

L'intuition de la réponse vient du développement. L'une de ses applications (voir application 35) consiste à démontrer que les automorphismes de  $\mathbb{H}$  sont intérieurs. On imagine ainsi que c'est également le cas de ceux de  $SO_3(\mathbb{R})$ . Une preuve de ce résultat est donnée dans [Per96] (§VI.8).

## Sujets non évoqués dans le plan

On m'a également demandé ce qui pourrait éventuellement être ajouté dans le plan. Plusieurs résultats sur des notions liées à la géométrie dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  (définition des angles orientés ou non, produit vectoriel, détermination de l'angle orienté d'une rotation, etc.) pourraient être mentionnés dans la partie sur les endomorphismes orthogonaux. J'ai également choisi de ne pas évoquer les formes quadratiques, qui peuvent aussi faire l'objet d'au moins un développement dans cette leçon. Cependant, ce point de vue vient généraliser la notion de structure euclidienne sur un espace vectoriel, et je trouve qu'il y a suffisamment de contenu à apporter sans avoir à s'éloigner à ce point du thème principal de la leçon, qui doit rester celui des endomorphismes liés au produit scalaire initial. Finalement, j'aurais pu citer quelques applications de plus, comme la restriction de l'exponentielle matricielle aux matrices symétriques, ou bien des méthodes d'optimisation en analyse numérique.

# Index des notations

$L(E)$	Algèbre des endomorphismes sur $E$
$A^\perp$	Orthogonal de la partie $A \subset E$
$F \oplus G$	Somme directe des sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$
$\llbracket m, n \rrbracket$	Ensemble des entiers compris entre $m$ et $n$ (inclus)
$\mathbb{R}_k[X]$	Espace des polynômes réels à une indéterminée de degré inférieur à $k \in \mathbb{N}$
$p_F$	Projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel $F$ de $E$
$s_F$	Symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel $F$ de $E$
$d(x, F)$	Distance du point $x \in E$ à la partie $F \subset E$
$u^*$	Adjoint de l'endomorphisme $u \in L(E)$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	Algèbre des matrices carrées de taille $n$ sur le corps $\mathbb{K}$
${}^tA$	Transposée de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$\text{Im}(f)$	Image de $E$ par l'application $f$
$\text{Id}$	Application identité sur $E$
$u \circ v$	Composée des applications $u$ et $v$
$O(E)$	Groupe orthogonal de $E$
$O_n(\mathbb{R})$	Groupe orthogonal d'indice $n \in \mathbb{N}^*$
$GL(E)$	Groupe des endomorphismes inversibles de $E$
$GL_n(\mathbb{R})$	Groupe linéaire d'indice $n \in \mathbb{N}^*$
$SO(E)$	Groupe des isométries directes de $E$
$O^-(E)$	Ensemble des isométries indirectes de $E$
$SO_n(\mathbb{R})$	Groupe spécial orthogonal d'indice $n \in \mathbb{N}^*$
$O_n^-(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices orthogonales indirectes
$G \cdot x$	Orbite de $x \in X$ sous l'action de $G$
$G_x$	Stabilisateur de $x \in X$ sous l'action de $G$
$\mathbb{S}^{n-1}$	Sphère unité de $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{H}$	Corps (non commutatif) des quaternions
$\bar{q}$	Conjugué d'un complexe dou d'un quaternion $q$
$G$	Groupe des quaternions de norme 1
$P$	Espace des quaternions purs
$G/H$	Quotient du groupe $G$ par un sous-groupe distingué $H$
$\mathbb{R}x$	Droite vectorielle dirigée par $x \in E$
$R(\theta)$	Rotation d'angle de $\theta$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
$S(\theta)$	Symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}e^{i\frac{\theta}{2}}$
$\text{Tr}(A)$	Trace de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$S_n(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices symétriques réelles de taille $n$
$A_n(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices anti-symétriques réelles de taille $n$
$S_n^+(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices symétriques semi-définies positives réelles de taille $n$
$S_n^{++}(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices symétriques définies positives réelles de taille $n$
$\ A\ _2$	Norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$\rho(A)$	Rayon spectral de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$GO_n(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices de similitudes de taille $n$
$E_\lambda$	Espace propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ d'un endomorphisme de $E$
$H_n(\mathbb{C})$	Ensemble des matrices hermitiennes de taille $n$ sur $\mathbb{C}$
$H_n^{++}(\mathbb{C})$	Ensemble des matrices hermitiennes définies positives de taille $n$ sur $\mathbb{C}$
$U_n(\mathbb{C})$	Groupe des matrices unitaires de taille $n$ sur $\mathbb{C}$
$A^*$	Matrice adjointe de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
$\text{diag}(d_i)_{1 \leq i \leq n}$	Matrice diagonale de taille $n$ dont la diagonale est composée des $d_i$

# Références

- [Aud06] Michèle Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 3è édition, 2006.
- [CG13] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, Tome premier*. 2013.
- [FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Oraux X-ENS, Algèbre III*. 2009.
- [Gou09] Xavier Gourdon. *Algèbre*. Ellipses, 2è édition, 2009.
- [Gri18] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 6è édition, 2018.
- [Per96] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. 1996.
- [Tau00] Patrice Tauvel. *Cours d'algèbre*. 2000.
- [VIKN08] Oleg Viro, Oleg Ivanov, Viatcheslav Kharlamov et Netsvetaev Nikita. *Elementary Topology*. 2008.